# Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 21-7-2020

## *Vraag 1a - 4 punten*

$f(x) = x + 2 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = x + 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \vee x + 2 = 0$

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (met $y = 0$)

$(x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \vee x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 2$ (met $y = 4$) of $x = 0$ (met $y = 2$)

*Ook goed (maar met meer rekenwerk):*

$(x-1)^2(x+2) = x + 2 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x+2) = x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x + 2$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$ met *y*-waarden als hierboven.

## *Vraag 1b - 5 punten*

$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x+2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2$ geeft $f'(x) = 3x^2 - 3$

*Ook:* $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = 2x^2 + 2x - 4 + x^2 - 2x + 1 = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$

$f(-1) = 4$ en $f(1) = 0$ geeft $0 < p < 4$, want $p$ ligt tussen de minimale en de maximale waarde van $f(x)$.

## *Vraag 1c - 8 punten*

De oppervlakte van de driehoek ingesloten door *k* en de assen is $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} x^3 - 3x + 2\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{0} = 0 - (4 - 6 - 4) = 6$$

$$\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^3 - 3x + 2\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{0}^{1} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2} + 2 - 0 = \tfrac{3}{4}$$

De oppervlakte van het vlakdeel boven *k* is $6 - 2 = 4 = \frac{16}{4}$

De oppervlakte van het vlakdeel onder *k* is $\frac{3}{4} + 2 = 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

*De oppervlakte van het vlakdeel boven k kan ook berekend worden met* $\int_{-2}^{0} f(x) - (x+2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,\mathrm{d}x$

## *Vraag 2a - 4 punten*

$y = p \Rightarrow x^2 + p^2 - 4p = 20 \Leftrightarrow x^2 = -p^2 + 4p + 20$

Dit geeft $x_{B_p} = -\sqrt{-p^2 + 4p + 20}$ en $x_{C_p} = \sqrt{-p^2 + 4p + 20}$

De horizontale zijde van de driehoek heeft dus lengte $2\sqrt{-p^2 + 4p + 20}$

De hoogte van de driehoek is $p$.

De oppervlakte van de driehoek is zodoende $\frac{1}{2} \cdot p \cdot 2\sqrt{-p^2 + 4p + 20}$

## *Vraag 2b - 6 punten*

$O(p) = p \cdot \sqrt{-p^2 + 4p + 20}$ geeft $O'(p) = \sqrt{-p^2 + 4p + 20} + p \cdot (-2p + 4)/2\sqrt{-p^2 + 4p + 20}$

$O'(p) = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{-p^2 + 4p + 20}\right)^2 + p \cdot (-2p + 4)/2 = 0 \Leftrightarrow -p^2 + 4p + 20 - p^2 + 2p = 0 \Leftrightarrow -2p^2 + 6p + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$p^2 - 3p - 10 = 0 \Leftrightarrow (p+2)(p-5) = 0 \Leftrightarrow p = -2 \vee p = 5$. De enige positieve oplossing is $p = 5$.

$O(5) = 5 \cdot \sqrt{-25 + 20 + 20} = 5\sqrt{15}$

## *Vraag 2c - 5 punten*

De stelling van Thales zegt dat de schuine zijde van een rechthoekige driehoek een middellijn is van de omgeschreven cirkel. De lengte van deze schuine zijde is dus de diameter van de cirkel.

De vergelijking van de cirkel is $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 24 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 24$

De straal van de cirkel is dus $\sqrt{24}$ en de diameter is $2\sqrt{24}$ $\left(= 4\sqrt{6}\right)$

*Er zijn andere redeneringen mogelijk, maar deze geven veel meer rekenwerk en dus veel meer kans op fouten.*

## *Vraag 3a - 3 punten*

***Met richtingscoëfficiënten:***

De richtingscoëfficiënt van $\ell$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

Voor de richtingscoëfficiënt $a$ van de lijn loodrecht op $\ell$ geldt dus $a \cdot -\frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow a = 2$

Deze lijn gaat door $(0{,}0)$, dus de vergelijking is $y = 2x$

***Met normaalvector:***

De normaalvector van de loodrechte lijn is de richtingsvector van $\ell$

De vergelijking van deze lijn heeft dus de vorm $2x - y = c$

Deze lijn gaat door $(0{,}0)$, dus $c = 0$ en de vergelijking is $2x - y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$

## *Vraag 3b - 6 punten*

***Met de vergelijking van een lijn door het middelpunt van de cirkel:***

De gezochte raakpunten zijn de snijpunten van de lijn door het middelpunt van de cirkel die evenwijdig loopt aan $\ell$, dat is de lijn met richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{2}$ door punt $(3{,}0)$.

$y = -\frac{1}{2}x + b$ geeft dan $0 = -\frac{3}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$, dus deze lijn heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ substitueren in de vergelijking van de cirkel geeft

$(x-3)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 20 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x^2 - \frac{15}{2}x - \frac{35}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow$
$(x-7)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = -1$

De raakpunten zijn dus $(7, -2)$ en $(-1{,}2)$

*Kan ook met de vectorvoorstelling van deze lijn:*

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; *$x = 3 + 2\lambda$ en $y = -\lambda$ invullen in de vergelijking van de cirkel geeft $\lambda = \pm 2$*

***Met raaklijnen evenwijdig aan $y = 2x$:***

De raaklijnen hebben een vergelijking van de vorm $y = 2x + b$ en hebben één punt gemeenschappelijk met de cirkel.

$y = 2x + b$ substitueren in de vergelijking van de cirkel geeft
$(x-3)^2 + (2x+b)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x^2 + 4bx + b^2 = 20 \Leftrightarrow 5x^2 + (4b-6)x + (b^2 - 11) = 0$ (*)

$D = (4b-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 11) = 16b^2 - 48b + 36 - 20b^2 + 220 = -4b^2 - 48b + 256$

$D = 0 \Leftrightarrow b^2 + 12b - 64 = 0 \Leftrightarrow (b+16)(b-4) = 0 \Leftrightarrow b = -16 \vee b = 4$

Invullen van $b = -16$ in (*) geeft $5x^2 - 70x + 245 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \Leftrightarrow x = 7$;

Invullen van $b = 4$ in (*) geeft $5x^2 + 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

De raakpunten zijn dus $(7, -2)$ en $(-1{,}2)$

*Als in deze uitwerking begonnen is met een fout antwoord van vraag 3a, maar de berekeningen verder goed zijn, zijn alle punten voor vraag 3b toegekend.*

***Met de afstandsformule:***

De normaalvector van de raaklijnen is de richtingsvector van $\ell$, deze raaklijnen hebben dus een vergelijking van de vorm $2x - y = c$.
De afstand tussen deze raaklijnen en het middelpunt $P(3{,}0)$ van de cirkel wordt gegeven door

$$\frac{|ax_p + by_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot 3 - 0 - c|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|6-c|}{\sqrt{5}}$$

Dit moet gelijk zijn aan de staal van de cirkel, dus volgt

$\frac{(6-c)^2}{5} = 20 \Leftrightarrow (6-c)^2 = 100 \Leftrightarrow 6 - c = 10 \vee 6 - c = -10 \Leftrightarrow c = -4 \vee c = 16$

$c = -4$ geeft $2x - y = -4 \Leftrightarrow y = 2x + 4$,
dus $(x-3)^2 + (2x+4)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x^2 + 16x + 16 = 20 \Leftrightarrow 5x^2 + 10x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$c = 16$ geeft $2x - y = 16 \Leftrightarrow y = 2x - 16$,
dus $(x-3)^2 + (2x-16)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 64x + 256 = 20 \Leftrightarrow 5x^2 - 70x + 245 = 0 \Leftrightarrow x = 7$

De raakpunten zijn zodoende $(7, -2)$ en $(-1{,}2)$

 

## *Vraag 4a - 8 punten*

$f'(x) = \mathrm{e}^{-0{,}5x^2+3x-4} \cdot (-x+3)$

$f''(x) = \mathrm{e}^{-0{,}5x^2+3x-4} \cdot (-x+3) \cdot (-x+3) + \mathrm{e}^{-0{,}5x^2+3x-4} \cdot -1 = ((-x+3)^2 - 1) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x^2+3x-4}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3;\ \ f(3) = \mathrm{e}^{0{,}5} = \sqrt{\mathrm{e}}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (-x+3)^2 = 1 \Leftrightarrow -x+3 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 3+1 = 4 \vee x = 3-1 = 2;\ \ f(2) = f(4) = \mathrm{e}^0 = 1$

De oppervlakte van de driehoek is dus $\frac{1}{2} \cdot (x_C - x_B) \cdot (y_A - y_B) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\mathrm{e}^{0{,}5} - 1) = \mathrm{e}^{0{,}5} - 1$

## *Vraag 4b - 4 punten*

$f(x) = g_a(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}5x^2+3x-4} = \mathrm{e}^{x-a} \Leftrightarrow -0{,}5x^2 + 3x - 4 = x - a \Leftrightarrow -0{,}5x^2 + 2x + (a-4) = 0$

Er is één gemeenschappelijk punt als $D = 2^2 - 4 \cdot -0{,}5 \cdot (a-4)$ gelijk is aan 0.

$D = 0 \Leftrightarrow 4 + 2a - 8 = 0 \Leftrightarrow 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

## *Vraag 5a - 4 punten*

De grafiek van $f_a$ heeft een verticale asymptoot als $x^2 + ax + 36 = 0$

Er zijn twee verticale asymptoten als de discriminant van deze vergelijking positief is.

$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = a^2 - 144$

$D > 0 \Leftrightarrow a^2 > 144 \Leftrightarrow a > 12 \vee a < -12$

## *Vraag 5b - 7 punten*

$g(0) = \ln(4)$, dus te berekenen $\pi \cdot \int_0^{\ln(4)} x^2 \,\mathrm{d}y$

$y = \ln(4-x) \Leftrightarrow 4 - x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x = 4 - \mathrm{e}^y$, dus $x^2 = (4-\mathrm{e}^y)^2 = 16 - 8\mathrm{e}^y + (\mathrm{e}^y)^2$

$$\pi \cdot \int_0^{\ln(4)} x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \cdot \left[16y - 8\mathrm{e}^y + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\right]_0^{\ln(4)} = \pi \cdot \left(16\ln(4) - 8 \cdot 4 + \tfrac{1}{2} \cdot 16 - \left(0 - 8 + \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \pi \cdot \left(16\ln(4) - 32 + 8 + 8 - \tfrac{1}{2}\right) = \pi \cdot \left(16\ln(4) - 16\tfrac{1}{2}\right)$$

## *Vraag 5c - 4 punten*

In een perforatie geldt $f_a(x) = 0$ en $g(x) = 0$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(4-x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x = 1 \Leftrightarrow x = 3$

$f_a(3) = \ln(9 + 3a + 36) = \ln(3a + 45)$

$f_a(3) = 0 \Leftrightarrow \ln(3a+45) = 0 \Leftrightarrow 3a + 45 = 1 \Leftrightarrow 3a = -44 \Leftrightarrow a = -\frac{44}{3} = -14\frac{2}{3}$

 

*Vraag 6a - 7 punten*

$x = -1 \Leftrightarrow \sin(t) - 2\sin^2(t) = -1 \Leftrightarrow p - 2p^2 = -1 \Leftrightarrow 2p^2 - p - 1 = 0$ met $p = \sin(t)$

Dit geeft $p = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow p = 1 \vee p = -\frac{1}{2}$

$p = \sin(t) = 1$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow y = \cos(t) = 0$

$p = \sin(t) = -\frac{1}{2}$ geeft $t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee p = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow y = \cos(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \vee y = \cos(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

*Kan ook met dubbele hoek formule:*

$\sin(t) - 2\sin^2(t) = -1 \Leftrightarrow \sin(t) + 1 - 2\sin^2(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(t) + \cos(2t) = 0$

Dit geeft $\cos(2t) = -\sin(t) = \sin(-t) = \cos(-t - \frac{1}{2}\pi)$

*Meer varianten mogelijk, maar deze geeft het eenvoudigste rekenwerk.*

Hieruit volgt $2t = -t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 3t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

of $2t = t + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

Samen geeft dit dezelfde waarden van $t$ (en dus van $y$) als hierboven.

*Vraag 6b - 8 punten*

$x'(t) = \cos(t) - 2 \cdot 2\sin(t) \cdot \cos(t) = \cos(t) - 4\sin(t)\cos(t)$

$x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t)\,(1 - 4\sin(t)) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \vee \sin(t) = \frac{1}{4}$

$\cos(t) = 0$ geeft $\sin(t) = \pm 1$, dus $x = 1 - 2 = -1 \vee x = -1 - 2 = -3$

$\sin(t) = \frac{1}{4}$ geeft $x = \sin(t) - 2\sin^2(t) = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

$y$ is minimaal $-1$ en maximaal 1

De oppervlakte van de rechthoek is dus $\left(\frac{1}{8} - -3\right) \cdot (1 - -1) = 3\frac{1}{8} \cdot 2 = 6\frac{1}{4}$

*Vraag 6c - 7 punten*

***Met tangens:***

De tangens van de hoek $\alpha$ tussen de baan van *P* en de *x*-as wordt gegeven door $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

$y'(t) = -\sin(t) \Rightarrow y'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $x'(t) = \cos(t) - 4\sin(t)\cos(t)$ dus $x'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - 2$

Dit geeft $\tan(\alpha) = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2} \approx 0{,}5469$ en $\alpha \approx 29°$

De hoek tussen de baan van *P* en lijn $\ell$ is dan afgerond $45° - 29° = 16°$

***Met cosinus:***

De cosinus van de hoek tussen de baan van *P* en lijn $\ell$ wordt gegeven door $\cos(\beta) = \frac{(rv_{kromme} \cdot rv_{lijn})}{|rv_{kromme}| \cdot |rv_{lijn}|}$

$rv_{kromme} = \begin{pmatrix} x'\left(\frac{1}{4}\pi\right) \\ y'\left(\frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} - 2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (*zie hierboven*), $rv_{lijn} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(rv_{kromme} \cdot rv_{lijn}) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \cdot 1 = -2$

$|rv_{kromme}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2\right)^2 + \frac{1}{2}}$, $\quad |rv_{lijn}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Dit geeft $\cos(\beta) = \frac{-2}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 2\right)^2 + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}} \approx -0{,}65124$ en $\beta \approx 164°$, wat overeenkomt met een scherpe hoek van $16°$