Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 23 juli 2024

Vraag 1a - 5 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(2x^2+7) = 2\ln(2x+1) \Rightarrow \ln(2x^2+7) = \ln\left((2x+1)^2\right)$

Dit geeft $2x^2+7 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow 2x^2+7 = 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow -2x^2-4x+6=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-3$

$x=1$ geeft $y=f(1)=g(1)=\ln(9)$ $(=2\ln(3))$

$x=-3$ voldoet niet, want $g(-3)$ bestaat niet.

Vraag 1b - 8 punten

$h'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$; $h''(x) = \frac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$; $h(0)=\ln(4)$; A is dus het punt $(0,\ln(4))$

$h''(x)=0 \Leftrightarrow 8-2x^2=0 \Leftrightarrow 2x^2=8 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

$h(2)=h(-2)=\ln(8)$; B en C zijn dus de punten $(2,\ln(8))$ en $(-2,\ln(8))$

De oppervlakte van driehoek D is zodoende

$\frac{1}{2}\cdot\left(2-(-2)\right)\cdot(\ln(8)-\ln(4)) = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\ln\left(\frac{8}{4}\right) = 2\ln(2) = \ln(2^2) = \ln(4)$

Vraag 1c - 7 punten

$y = 2\ln(4-x^2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}y = \ln(4-x^2) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y} = 4-x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y}$

$k(0)=2\ln(4)$, dus de inhoud van V is

$\pi\cdot\int_0^{2\ln(4)} x^2\,\mathrm{d}y = \pi\cdot\int_0^{2\ln(4)} 4-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y}\,\mathrm{d}y = \pi\cdot\left[4y-2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y}\right]_0^{2\ln(4)}$

$= \pi\cdot\left(8\ln(4)-2\mathrm{e}^{\ln(4)}-(0-2)\right) = \pi\cdot(8\ln(4)-2\cdot 4+2) = \pi\cdot(8\ln(4)-6)$

Kan ook met bovengrens $k(0)=2\ln(4)=\ln(16)$.

Dit geeft in de laatste regel: $\pi\left(4\ln(16)-2\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(16)}-(0-2)\right) = \pi\cdot\left(4\ln(16)-2\mathrm{e}^{\ln(\sqrt{16})}+2\right)$

$= \pi\cdot\left(4\ln(16)-2\mathrm{e}^{\ln(4)}+2\right) = \pi\cdot(4\ln(16)-2\cdot 4+2) = \pi(4\ln(16)-6)$

Vraag 2a - 5 punten

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2(1-\sin^2(x))-5\sin(x)-5=0 \Leftrightarrow -2\sin^2(x)-5\sin(x)-3=0$

$-2y^2-5y-3=0 \Leftrightarrow y = \frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot -2} = \frac{5\pm\sqrt{1}}{-4}$

Hieruit volgt $\sin(x) = \frac{5+1}{-4} = -1\frac{1}{2} \vee \sin(x) = \frac{5-1}{-4} = -1$

$\sin(x) = -1\frac{1}{2}$ heeft geen oplossingen

$\sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

Vraag 2b - 7 punten

Met dubbele hoek formule:

$g'(x) = -2\sin(2x) - 2\cos(x) = -2 \cdot 2\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) = -4\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) = 0 \Leftrightarrow (-4\sin(x) - 2) \cdot \cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow -4\sin(x) - 2 = 0 \vee \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2} \vee \cos(x) = 0$

$\sin(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $g(x) = \cos(2x) - 2\sin(x) = 1 - 2\sin^2(x) - 2\sin(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2}$

ook: $x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi$, *dus* $g(x) = \cos(2x) - 2\sin(x) = \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2}$

$\cos(x) = 0$ geeft $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$,

dus $g(x) = g\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1 - 2 \cdot 1 = -3$ of $g(x) = g\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -1 - 2 \cdot (-1) = -1 + 2 = 1$

De minimale waarde van $g(x)$ is dus -3 en de maximale waarde van $g(x)$ is $1\frac{1}{2}$

Alternatief:

$g'(x) = -2\sin(2x) - 2\cos(x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\,(x + \pi)$

Hieruit volgt: $2x - \frac{1}{2}\pi = x + \pi + k \cdot 2\pi \vee 2x - \frac{1}{2}\pi = -x - \pi + k \cdot 2\pi$

$2x - \frac{1}{2}\pi = x + \pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi.$

$2x - \frac{1}{2}\pi = -x - \pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 3x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

We krijgen dus 4 series oplossingen:

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi,\; x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi,\; x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Dit kan op vele manieren uitgewerkt worden, alle met dezelfde 4 series oplossingen.

$g\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1 - 2 \cdot 1 = -3;\; g\left(1\frac{1}{6}\pi\right) = g\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1\frac{1}{2};\; g\left(1\frac{1}{2}\pi\right) = -1 - 2 \cdot (-1) = 1$

De minimale waarde van $g(x)$ is dus -3 en de maximale waarde van $g(x)$ is $1\frac{1}{2}$

Vraag 2c - 6 punten

$\int_0^a 6\sin(3x)\;\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow [-2\cos\,(3x)]_0^a = 1 \Leftrightarrow -2\cos(3a) - 2 \cdot -1 = 1 \Leftrightarrow -2\cos(3a) + 2 = -1$

$\Leftrightarrow -2\cos(3a) = -1 \Leftrightarrow \cos(3a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3a = \pm\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Oplossingen op het interval $0 \leq a \leq \pi$: $a = \frac{1}{9}\pi,\; a = \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{7}{9}\pi,\; a = -\frac{1}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{9}\pi$

Vraag 2d - 6 punten

$k'(x) = 2x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + x^2 \cdot -\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot -\frac{\pi}{x^2} = 2x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Dit geeft $k'(2) = 4 \cdot 0 + \pi \cdot 1 = \pi$

$\tan^{-1}(\pi) \approx 72{,}3°$. De hoek tussen ℓ en de *y*-as is dus $90° - 72{,}3° = 17{,}7°$

Laatste regel kan ook met $\cos(\alpha) = \frac{\left(\binom{1}{\pi}\binom{0}{1}\right)}{\sqrt{1^2+\pi^2} \cdot \sqrt{0^2+1^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}$ dus $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^2}}\right) \approx 17{,}7°$

Vraag 3a - 7 punten

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$f'(x) = (2x-2) \cdot \mathrm{e}^{x^2-2x} + (x^2-2x) \cdot \mathrm{e}^{x^2-2x} \cdot (2x-2)$

Dit geeft $f'(0) = -2\mathrm{e}^0 + 0 = -2 \cdot 1 = -2$ en $f'(2) = 2 \cdot \mathrm{e}^0 - 0 = 2 \cdot 1 = 2$

De lijn door het middelpunt M van c_1 en $O(0,0)$ staat loodrecht op de raaklijn aan de grafiek van f in O.
Voor de richtingscoëfficiënt a_1 van deze lijn geldt dus $-2 \cdot a_1 = -1 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2}$.
De vergelijking van deze lijn is $y = \frac{1}{2}x$.

De lijn door het middelpunt M van c_1 en $A(2,0)$ staat loodrecht op de raaklijn aan de grafiek van f in A.
Voor de richtingscoëfficiënt a_2 van deze lijn geldt dus $2 \cdot a_2 = -1 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$.
De vergelijking van deze lijn is $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

M is het snijpunt van deze lijnen, dus los op: $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x = 1$. M is zodoende het punt $\left(1, \frac{1}{2}\right)$
De vergelijking van een cirkel met middelpunt $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$ heeft de vorm $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = r^2$
Invullen van $x = 0$ (of $x = 2$) en $y = 0$ of $r = d(OM) = d(AM) = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ geeft $r^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$
De vergelijking van c_1 is dus $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

N.B. Als je M vindt als het snijpunt van $y = \frac{1}{2}x$ en $x = 1$ krijg je dezelfde cirkelvergelijking, maar moet je nog wel aantonen dat deze cirkel de grafiek van f raakt in $A(2,0)$.

Vraag 3b - 7 punten

Eerst de coördinaten van M, A en B bepalen:

M is het middelpunt van c_2, dat is het punt $(2,1)$.

Invullen van $y = 3x + 10$ in de vergelijking van c_2 geeft
$(x-2)^2 + (3x+9)^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 + 54x + 81 = 45 \Leftrightarrow 10x^2 + 50x + 40 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -4$
Mag uiteraard ook met de abc-formule.
$x = -4$ geeft $y = -12 + 10 = -2$; $x = -1$ geeft $y = -3 + 10 = 7$,
dus krijgen we de punten $A(-4,-2)$, en $B(-1,7)$

Vervolg 3b met de lengtes van de zijden van driehoek ABM:
$d(A,B) = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90}$, $d(A,M) = d(B,M) = r_{c_2} = \sqrt{45}$
Hieruit volgt dat $d(A,B)^2 = d(A,M)^2 + d(B,M)^2$
De omgekeerde stelling van Pythagoras zegt dan dat $\angle AMB = 90°$
De omgekeerde stelling van Thales zegt dan dat AB een middellijn van c_3 is.

Vervolg 3b met richtingscoëfficiënten:

De lijn door A en M heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1-(-2)}{2-(-4)} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$

De lijn door B en M heeft richtingscoëfficiënt $\frac{1-7}{2-(-1)} = \frac{6}{-3} = -2$

$\frac{1}{2} \cdot -2 = -1$, dus $\angle AMB = 90°$

De omgekeerde stelling van Thales zegt dan dat AB een middellijn van c_3 is.

Vervolg 3b met het middelpunt van c_3:

Invullen van de coördinaten van A, B en M in $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ geeft

$(-4-a)^2 + (-2-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 + 8a + 16 + b^2 + 4b + 4 = r^2 \Leftrightarrow a^2 + 8a + b^2 + 4b + 20 = r^2$ ①

$(-1-a)^2 + (7-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 + 2a + 1 + b^2 - 14b + 49 = r^2 \Leftrightarrow a^2 + 2a + b^2 - 14b + 50 = r^2$ ②

$(2-a)^2 + (1-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + b^2 - 2b + 1 = r^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + b^2 - 2b + 5 = r^2$ ③

Combineren van ① en ② geeft $8a + 4b + 20 = 2a - 14b + 50 \Leftrightarrow a = -3b + 5$

Combineren van ① en ③ geeft $8a + 4b + 20 = -4a - 2b + 5 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}b - \frac{5}{4}$

Hieruit volgt $-3b + 5 = -\frac{1}{2}b - \frac{5}{4} \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$ en $a = -\frac{5}{2}$

Het middelpunt van c_3 is dus het punt $N\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Dit is het midden van lijnstuk AB, dus is AB inderdaad een middellijn van c_3.

Je kunt hier ook de straal van c_3 berekenen $\big(= d(A,N) = d(B,N) = d(M,N)\big)$ en aantonen dat $d(A,B)$ twee keer zo groot is.

Vervolg 3b met omgekeerde redenering:

Het middelpunt van lijnstuk AB, dat is het punt $N\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, is het middelpunt van de cirkel met middellijn AB.

$d(A,N) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{22\frac{1}{2}}$ $\big(= d(B,N)\big)$; $d(M,N) = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{22\frac{1}{2}}$

M ligt zodoende ook op de cirkel met middellijn AB, dus deze cirkel komt overeen met de gegeven beschrijving van cirkel c_3.

Vraag 3c - 6 punten

De lijn door O en B (dat is de lijn $y = x$) heeft richtingscoëfficiënt 1, dus $\angle AOB = 45°$

De lijn door A en B heeft richtingscoëfficiënt $\frac{3-0}{3-(3+\sqrt{3})} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

Dit geeft $\angle OAB = \left|\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)\right| = 60°$

Deze hoeken kunnen ook gevonden worden in de rechthoekige driehoeken ODB en ADB, met $D(3,0)$.

Uit de gelijkvormigheid volgt dat $\angle CAB = \angle AOB$

Dit geeft $\angle OAC = \angle OAB - \angle CAB = \angle OAB - \angle AOB = 60° - 45° = 15°$

De gelijkvormigheid kan ook gebruikt worden om de lengtes van de zijden van driehoek ACB te berekenen. De lengtes van de zijden van driehoek OAB zijn immers te bekend of te berekenen met de stelling van Pythagoras en de lengte van de zijde AB is van driehoek ACB is dan ook bekend.
Daarmee kun je ook de lengte van OC berekenen en kun je de cosinus van hoek OAB berekenen met de cosinusregel of de sinus van deze hoek met de sinusregel.
Daarna moet je nog wel met een exacte berekening aantonen dat hoek OAC gelijk is aan 15°.
Aangezien dit veel meer werk is dan bovenstaande uitwerking, is dit hier niet verder uitgewerkt.

Vraag 4a - 5 punten

Er is een perforatie als $x^2 + x - 6 = 0 \wedge 2x - a = 0$

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$

$x = 2$ invullen in $2x - a = 0$ geeft $4 - a = 0 \Leftrightarrow a = 4$

$x = -3$ invullen in $2x - a = 0$ geeft $-6 - a = 0 \Leftrightarrow a = -6$

Hoeft niet te worden opgemerkt als de enige(!) positieve waarde $a = 4$ al gevonden is.

We zoeken dus de perforatie van f_4

Voor $x \neq 2$ geldt: $f_4(x) = \frac{x^2+x-6}{2x-4} = \frac{(x+3)(x-2)}{2(x-2)} = \frac{x+3}{2} = f^*(x)$

De coördinaten van de perforatie zijn dus $x = 2$ en $y = f^*(2) = \frac{5}{2}$

Vraag 4b - 5 punten

Er is een verticale asymptoot als $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

In de uitwerking van vraag a is al gevonden dat de teller dan niet 0 is, dit hoeft hier niet expliciet opgemerkt te worden.

Herschrijven van de formule van f_6 geeft:

$$f_6(x) = \frac{x^2+x-6}{2x-6} = \frac{x^2-3x+4x-6}{2x-6} = \frac{x^2-3x}{2x-6} + \frac{4x-6}{2x-6} = \frac{x(x-3)}{2(x-3)} + \frac{4x-12+6}{2x-6}$$

$$= \tfrac{1}{2}x + \frac{4x-12}{2x-6} + \frac{6}{2x-6} = \tfrac{1}{2}x + 2 + \frac{6}{2x-6}$$

Dit geeft $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f_6(x) - \left(\frac{1}{2}x + 2\right)\right) = 0$

De asymptoten zijn dus $x = 3$ en $y = \frac{1}{2}x + 2$

De scheve asymptoot kan ook gevonden worden met een staartdeling en met

$$f_6'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(2x-6) - (x^2+x-6)\cdot 2}{(2x-6)^2} = \frac{2x^2-12x+6}{4x^2-24x+36} = \frac{2 - \frac{12}{x} + \frac{6}{x^2}}{4 - \frac{24}{x} + \frac{36}{x^2}}$$

Dit geeft $\lim_{x\to\pm\infty} f_6{}'(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$f_6(x) - \tfrac{1}{2}x = \frac{x^2+x-3}{2x-6} - \frac{\frac{1}{2}x(2x-6)}{2x-6} = \frac{4x-3}{2x-6} = \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 - \frac{6}{x}}$$

Dit geeft $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f_6(x) - \frac{1}{2}x\right) = 2$

Vraag 4c - 7 punten

$\sqrt{8x} = x^2 \Leftrightarrow 8x = x^4 \Leftrightarrow x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Een primitieve van $g(x) = \sqrt{8x}$ is $G(x) = \frac{2}{3}(8x)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}(8x)^{\frac{3}{2}}$. Dit geeft $G(2) = \frac{1}{12} \cdot 16^{\frac{3}{2}} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$

Alternatief: Een primitieve van $g(x) = \sqrt{8} \cdot \sqrt{x}$ is $G(x) = \sqrt{8} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Dit geeft $G(2) = \sqrt{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2^3} = \sqrt{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{8} = 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

De oppervlakte van *V* is dus $\int_0^2 g(x) - x^2 \, \mathrm{d}x = \left[G(x) - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} - (0 - 0) = \frac{8}{3}$

