Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 23-7-2022

Vraag 1a - 5 punten

$f(x) = g_5(x) \Leftrightarrow \frac{8}{x^2} = 5 - \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow 8 = 5x^2 - \frac{1}{2}x^4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + 8 = 0$

Met $u = x^2$ volgt dan:

$\frac{1}{2}u^2 - 5u + 8 = 0 \Leftrightarrow u^2 - 10u + 16 = 0 \Leftrightarrow (u-2)(u-8) = 0 \Leftrightarrow u = 2 \vee u = 8$
Kan uiteraard ook met de abc-formule.

$x^2 = u = 2$ geeft $x = \pm\sqrt{2}$ en $y = \frac{8}{2} = 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 4$, dus snijpunten $(-\sqrt{2}, 4)$ en $(\sqrt{2}, 4)$

$x^2 = u = 8$ geeft $x = \pm\sqrt{8}$ en $y = \frac{8}{8} = 5 - \frac{1}{2} \cdot 8 = 1$, dus snijpunten $(-\sqrt{8}, 1)$ en $(\sqrt{8}, 1)$

Vraag 1b - 5 punten

$y_{F_p} = f(p) = \frac{8}{p^2}$; $y_{G_p} = g_1(p) = 1 - \frac{1}{2}p^2$

De afstand tussen F_p en G_p wordt dus gegeven door $h(p) = d\left(F_p, G_p\right) = \frac{8}{p^2} - 1 + \frac{1}{2}p^2$
Mag zonder absolute waarde strepen, de grafiek van f ligt geheel boven die van g_1.
$h'(p) = 0 \Leftrightarrow -\frac{16}{p^3} + p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{16}{p^3} \Leftrightarrow p^4 = 16$; oplossing met $p > 0$: $p = 2$

Vraag 1c - 8 punten

$g_2(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_C = 2$

Oppervlakte *V*: $\int_0^2 2 - g_2(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 2 - \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{6} \cdot 8 - \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{4}{3}$

Oppervlakte *W*: $\int_2^p f(x)\ \mathrm{d}x = \int_2^p \frac{8}{x^2}\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{8}{x}\right]_2^p = -\frac{8}{p} - \left(-\frac{8}{2}\right) = -\frac{8}{p} + 4$

Oppervlakte *V* = $\frac{1}{2}$ Oppervlakte *W* $\Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{8}{p} + 4\right) \Leftrightarrow \frac{4}{3} = -\frac{4}{p} + 2 \Leftrightarrow \frac{4}{p} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{p}{4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow p = 6$

Vraag 2a - 6 punten

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 2) - \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 2)^2} = \frac{2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 2)^2 - 2\mathrm{e}^x \cdot 2 \cdot (\mathrm{e}^x + 2) \cdot \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 2)^4} = \frac{2\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 2) \cdot (\mathrm{e}^x + 2) - 2\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 2) \cdot 2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 2)^4}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 2) \cdot (\mathrm{e}^x + 2) - 2\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 2) \cdot 2\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x + 2) \cdot (\mathrm{e}^x + 2 - 2\mathrm{e}^x) = 0$

Dit geeft $\mathrm{e}^x + 2 - 2\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$ en $y = f(\ln(2)) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$

Vraag 2b - 7 punten

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 4 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln(4)$

De inhoud van het omwentelingslichaam wordt dus gegeven door

$$\pi \cdot \int_0^{\ln(4)} \left(g(x)\right)^2\ \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\ln(4)} (\mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x)^2\ \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\ln(4)} \mathrm{e}^{4x} - 8\mathrm{e}^{3x} + 16\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} - \frac{8}{3}\mathrm{e}^{3x} + 8\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln(4)} = \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4\ln(4)} - \frac{8}{3}\mathrm{e}^{3\ln(4)} + 8\mathrm{e}^{2\ln(4)} - \left(\frac{1}{4} - \frac{8}{3} + 8\right)\right)$$

$$= \pi \cdot \left(64 - \frac{512}{3} + 128 - \frac{1}{4} + \frac{8}{3} - 8\right) = \pi \cdot 15\tfrac{3}{4}$$

Vraag 2c - 5 punten

$h(x) = \ln(x+2) + \frac{1}{3}\ln(x^3) = \ln(x+2) + \ln(x) = \ln\big((x+2)\cdot x\big) = \ln(x^2+2x)$

$h(x) = \ln(8)$ geeft $x^2 + 2x = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 2$

$x = 2$ geeft (uiteraard) $y = \ln(8)$
$x = -4$ valt buiten het domein van h en is dus geen oplossing

Vraag 2d - 5 punten

$k_p'(x) = \dfrac{2px - p}{px^2 - px + 1}$, dus $k_p'(0) = -p$

Dit moet gelijk zijn aan de helling van de lijn door $O(0,0)$ en $A(1,2)$, dus aan 2.

$-p = 2$ geeft $p = -2$

Vraag 3a - 3 punten

$f(x) = 2\cos(x) + \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right)$ geeft

$f'(x) = -2\sin(x) + 2\cos\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right) = -2\sin(x) + 2\sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) = -2\sin(x) + 2\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$

Vraag 3b - 6 punten

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(x) + 2\sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$

Dit geeft $x = 2x + \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$ of $x = \pi - \left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) + k\cdot 2\pi$

$x = 2x + \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow -x = \frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = \pi - \left(2x + \frac{1}{3}\pi\right) + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\pi - 2x + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow 3x = \frac{2}{3}\pi + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}\pi + k\cdot\frac{2}{3}\pi$

Oplossingen op het interval $-2\pi \le x \le 2\pi$:

$x = -\frac{1}{3}\pi,\ x = -\frac{1}{3}\pi + 2\pi = 1\frac{2}{3}\pi,\ x = \frac{2}{9}\pi,\ x = \frac{2}{9}\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi,\ x = \frac{2}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi = 1\frac{5}{9}\pi$

$x = \frac{2}{9}\pi - \frac{2}{3}\pi = -\frac{4}{9}\pi,\ x = \frac{2}{9}\pi - \frac{4}{3}\pi = -1\frac{1}{9}\pi,\ x = \frac{2}{9}\pi - 2\pi = -1\frac{7}{9}\pi$

Vraag 3c - 6 punten

$f'\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = -2\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + 2\sin\left(-\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = -2\cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\sin(-\pi) = \sqrt{3} + 0 = \sqrt{3}$

$f'\left(\frac{1}{3}\pi\right) = -2\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) + 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = -2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\sin(\pi) = -\sqrt{3} + 0 = -\sqrt{3}$

$\angle DAE$, de hoek tussen *m* en de *x*-as, is dus $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi = 60°$

$\angle AED$, de hoek tussen *n* en de *x*-as, is ook $60°$

Hieruit volgt dat $\angle ADE$ ook $60°$ is, dus dat driehoek *ADE* gelijkzijdig is

Vraag 3d - 6 punten

De oppervlaktes zijn even groot als $\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$

$$\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} 2\cos(x) + \sin\left(2x - \tfrac{1}{6}\pi\right)\ \mathrm{d}x = \left[2\sin(x) - \tfrac{1}{2}\cos\left(2x - \tfrac{1}{6}\pi\right)\right]_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}$$

$$= 2\sin\left(\tfrac{4}{3}\pi\right) - \tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{8}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right) - 2\sin\left(-\tfrac{2}{3}\pi\right) + \tfrac{1}{2}\cos\left(-\tfrac{4}{3}\pi - \tfrac{1}{6}\pi\right) = 2\cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\cdot 0 - 2\cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

Vraag 4a - 5 punten

Er is een verticale asymptoot als $6x^2 - 17x + 12 = 0 \wedge 8x - 12 \neq 0$

$6x^2 - 17x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12}}{2 \cdot 6} = \frac{17 \pm 1}{12} \Leftrightarrow x = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \vee x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

Voor $x = \frac{3}{2}$ geldt $8x - 12 = 0$, dus de enige verticale asymptoot is $x = \frac{4}{3}$

$$f(x) = \frac{8x - 12}{6x^2 - 17x + 12} = \frac{\frac{8}{x} - \frac{12}{x^2}}{6 - \frac{17}{x} + \frac{12}{x^2}}$$

dus $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{0-0}{6-0+0} = 0$

De grafiek heeft zodoende als horizontale asymptoot de lijn $y = 0$ (dat is de *x*-as)

Vraag 4b - 8 punten

Berekenen vectorvoorstelling of vergelijking straal

$$f'(x) = \frac{8(6x^2 - 17x + 12) - (8x - 12)(12x - 17)}{(6x^2 - 17x + 12)^2}$$

of $f(x) = \frac{4(2x-3)}{(3x-4)(2x-3)} = \frac{4}{3x-4}$ geeft $f'(x) = -\frac{12}{(3x-4)^2}$

$x = 0$ geeft $f(0) = \frac{-12}{12} = -1$ en $f'(0) = \frac{8 \cdot 12 - 12 \cdot 17}{12^2} = \frac{-9}{12} = -\frac{3}{4}$ of $f'(0) = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$

De richtingscoëfficiënt van de lijn door het raakpunt $(0, -1)$ en het middelpunt van c is dus $\frac{4}{3}$,

ofwel de richtingsvector van deze lijn is $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Een vergelijking voor deze lijn is dus $y = \frac{4}{3}x - 1$

ofwel een vectorvoorstelling voor deze lijn is dus $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Berekening middelpunt cirkel

Met vergelijkingen lijnen:

Een vergelijking voor de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is $y = x + 1$

$x + 1 = \frac{4}{3}x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x = 2 \Leftrightarrow x = 6$. Dit geeft $y = 7$

Met vectorvoorstellingen:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 3\mu \\ 2 + \lambda = -1 + 4\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3\mu - 1 \\ \lambda = 4\mu - 3 \end{cases}$

Dit geeft $3\mu - 1 = 4\mu - 3 \Leftrightarrow \mu = 2$, dus $x = 3\mu = 6$ en $y = -1 + 4\mu = 7$

Kan ook met $\lambda = 5$, dus $x = 1 + \lambda = 6$ en $y = 2 + \lambda = 7$

Berekening vergelijking cirkel

De straal van de cirkel is $\sqrt{(6-0)^2 + \left(7 - (-1)\right)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

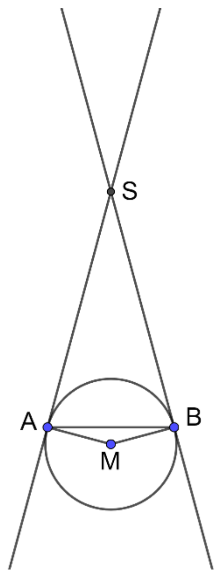
of invullen van $x = 0$ en $y = -1$ in $(x-6)^2 + (y-7)^2 = r^2$ geeft $r^2 = 6^2 + 8^2 = 100$

De vergelijking van de cirkel is dus $(x-6)^2 + (y-7)^2 = 100$

Vraag 4c - 6 punten

De straal van de cirkel is 5
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Leftrightarrow x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$ geeft
$a=\frac{1}{2}\cdot 8=4,\ b=\frac{1}{2}\cdot 6=3$ en $r^2=a^2+b^2=16+9=25$

$\boldsymbol{\angle MAB\ (=\angle MBA)=15°}$



$\angle SAB+\angle SBA+\angle ASB=180°$ (hoekensom driehoek)

$\angle SAB=\angle SBA$ (gelijkbenige driehoeken)

Dus $\angle SAB=\frac{1}{2}(180°-\angle ASB)=\frac{1}{2}(180°-30°)=\frac{1}{2}\cdot 150°=75°$

$\angle MAS=90°$ (hoek straal en raaklijn)

Dit geeft $\angle MAB=90°-\angle SAB=90°-75°=15°$

Voor wie de hoekensom van een vierhoek kent (staat niet op de leerstoflijst) is het bepalen van $\angle AMB$ iets eenvoudiger:

$\angle AMB=360°-\angle MAS-\angle MBS-\angle ASB$
$=360°-90°-90°-30°=150°$

$\boldsymbol{d(A,B)=10\cos(15°)\approx 9{,}66}$

N is het punt op *AB* met *MN* loodrecht op *AB*.

$\cos(\angle MAN)=\frac{|AN|}{|AM|}$ geeft $|AN|=|AM|\cdot\cos(\angle MAN)=5\cdot$
$\cos(15°)$

Op dezelfde manier volgt $|BN|=|BM|\cdot\cos(\angle MBN)=5\cdot\cos(15°)$

Hieruit volgt $d(A,B)=|AN|+|BN|=2\cdot 5\cdot\cos(15°)\approx 9{,}66$

Kan ook met de sinusregel:

$$\frac{|AB|}{\sin(\angle AMB)}=\frac{|AM|}{\sin(\angle MBA)}\Leftrightarrow |AB|=|AM|\cdot\frac{\sin(\angle AMB)}{\sin(\angle MBA)}=5\cdot\frac{\sin(150°)}{\sin(15°)}\approx 9{,}66$$

En met de cosinusregel:

$|AB|^2=|AM|^2+|BM|^2-2|AM||BM|\cos(\angle AMB)=5^2+5^2-2\cdot 5\cdot 5\cdot\cos(150°)=50-50\cos(150°)$

Dus $|AB|=\sqrt{50-50\cos(150°)}\approx 9{,}66$

