Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 18-12-2021

Vraag 1a - 7 punten

$f(x) = x + x^{-1}$, dus $f'(x) = 1 - x^{-2}$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is dus $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = 1 - 2^2 = 1 - 4 = -3$

Invullen van de coördinaten van *P* in $y = -3x + b$ of in $y - y_p = -3(x - x_p)$ geeft

$-2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = -4$ of $y + 2\frac{1}{2} = -3\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -3x - 4$

$y_Q = 0 \Rightarrow -3x_Q - 4 = 0 \Leftrightarrow x_Q = -1\frac{1}{3}$, dus *Q* is het punt $(-1\frac{1}{3}, 0)$

$x_R = 0 \Rightarrow y_R = -4$, dus *R* is het punt $(0, -4)$

Dit geeft $d(Q,R) = \sqrt{\left(-1\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(0 - (-4)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 16} = \sqrt{\frac{160}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{10}$

Vraag 1b - 8 punten

Om de oppervlakte van dit vlakdeel te berekenen, moet je de *x*-coördinaat van het rechter snijpunt van de grafiek van f en de lijn $x = 2\frac{1}{2}$ weten.

$f(x) = 2\frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2\frac{1}{2}x \Leftrightarrow x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$

Voor het rechter snijpunt geldt dus $x = 2$

De oppervlakte van het vlakdeel is dus $\int_1^2 f(x) - x \, \mathrm{d}x + \int_2^{2\frac{1}{2}} 2\frac{1}{2} - x \, \mathrm{d}x$

$= \int_1^2 x + \frac{1}{x} - x \, \mathrm{d}x + \int_2^{2\frac{1}{2}} 2\frac{1}{2} - x \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x + \int_2^{2\frac{1}{2}} 2\frac{1}{2} - x \, \mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^2 + \left[2\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right]_2^{2\frac{1}{2}}$

$= \ln(2) - \ln(1) + \frac{25}{4} - \frac{25}{8} - (5 - 2) = \ln(2) - 0 + \frac{25}{8} - 3 = \ln(2) + \frac{1}{8}$

De tweede integraal kan ook berekend worden als de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $\left(2{,}2\frac{1}{2}\right)$, $\left(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ *en* (2.2). *De oppervlakte van deze driehoek is* $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

De oppervlakte van het vlakdeel kan ook berekend worden met

$\int_1^{2\frac{1}{2}} 2\frac{1}{2} - x \, \mathrm{d}x - \int_1^2 2\frac{1}{2} - f(x) \, \mathrm{d}x = \int_1^{2\frac{1}{2}} 2\frac{1}{2} - x \, \mathrm{d}x - \int_1^2 2\frac{1}{2} - x - \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$

$= \left[2\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^{2\frac{1}{2}} - \left[2\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x)\right]_1^2 = \frac{25}{4} - \frac{28}{8} - \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - (5 - 2 - \ln(2) - (2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \ln(1))$

$= \frac{25}{8} - 2 - (3 - \ln(2) - 2 - 0) = \frac{9}{8} - (1 - \ln(2)) = \ln(2) + \frac{1}{8}$

De eerste integraal kan ook berekend worden als de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $\left(1{,}2\frac{1}{2}\right)$, $\left(2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}\right)$ *en* (1.1). *De oppervlakte van deze driehoek is* $\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{9}{8}$.

Vraag 2a - 3 punten

$x^2 + px + p = 0$ heeft twee oplossingen als $D = p^2 - 4p > 0$

$p^2 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee p = 4$, dus $D > 0 \Leftrightarrow p < 0 \vee p > 4$

Omdat $p \neq 0$ is $x = 0$ niet één van die twee oplossingen, dus zijn er twee snijpunten met de *x*-as als $p < 0$ en als $p > 4$

Vraag 2b - 3 punten

Verticale asymptoot: $x = 0$

$$g_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

Dit geeft $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(g_2(x) - (x + 2)\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$

De scheve asymptoot is zodoende $y = x + 2$

Alternatief voor de berekening van de scheve asymptoot:

$g_2'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$, dit geeft $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g_2{}'(x) = 1$.

De scheve asymptoot heeft dus een vergelijking van de vorm $y = x + b$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(g_2(x) - (x + b)\right) = 0$ geeft dan

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (g_2(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + 2 + \frac{2}{x} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 + \frac{2}{x}\right) = 2$$

De scheve asymptoot is zodoende $y = x + 2$

Vraag 2c - 8 punten

Noem het middelpunt van de cirkel *M*.

De cirkel raakt aan de grafiek als *MP* loodrecht staat op de raaklijn aan de grafiek in *P*.

$$g_2'(x) = \frac{(2x + 2) \cdot x - (x^2 + 2x + 2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 2x - 2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

of $g_2(x) = x + 2 + \frac{2}{x}$ geeft $g_2'(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$

Dit geeft $g_2'(2) = \frac{4-2}{4} = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

MP heeft dus richtingscoëfficiënt -2.

Invullen van de coördinaten van *P* in $y = ax + b$ of in $y - y_p = -2(x - x_p)$ geeft

$5 = -4 + b \Leftrightarrow b = 9$ of $y - 5 = -2(x - 2)$

De vergelijking van lijn *MP* is dus $y = -2x + 9$ en *M* is het punt $(0,9)$

$d(M, P) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (5 - 9)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

De vergelijking voor de cirkel is zodoende $x^2 + (y - 9)^2 = 20$

Vraag 3a - 4 punten

$F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot 4\cos(4x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\cos^2(2x) - 1) = \frac{1}{2} + \cos^2(2x) - \frac{1}{2} = f(x)$

Alternatief

$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ geeft $\cos^2(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$

Dit geeft $f(x) = \frac{1}{2}\cos(4x) + \frac{1}{2}$

$\int \frac{1}{2}\cos(4x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\sin(4x)\ (+C) = \frac{1}{8}\sin(4x)\ (+C)$

Dus $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{2}x\ \ (+C) = F(x)\ (+C)$

Vraag 3b - 4 punten

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

Te berekenen is dus

$\int_0^{\frac{1}{4}\pi} f(x)\ \mathrm{d}x = F\left(\frac{1}{4}\pi\right) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{8}\sin(\pi) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{8}\sin(0)\right) = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{8} \cdot 0 - 0 - \frac{1}{8} \cdot 0 = \frac{1}{8}\pi$

Vraag 3c - 6 punten

$f\left(\frac{1}{8}\pi\right) = \cos^2\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, dus *P* ligt inderdaad op de grafiek van *f*

$f'(x) = 2\cos(2x) \cdot [\cos(2x)]' = 2\cos(2x) \cdot (-2\sin(2x)) = -4\sin(2x)\cos(2x)$

Dit geeft $f''(x) = -4[\sin(2x)]' \cdot \cos(2x) + (-4\sin(2x)) \cdot [\cos(2x)]'$

$= -4 \cdot 2\cos(2x) \cdot \cos(2x) - 4\sin(2x) \cdot (-2\sin(2x)) = -8\cos^2(2x) + 8\sin^2(2x)$

Ook: $f'(x) = -2\sin(4x)$ geeft $f''(x) = -8\cos(4x)$

Hieruit volgt $f''\left(\frac{1}{8}\pi\right) = -8\cos^2\left(\frac{1}{4}\pi\right) + 8\sin^2\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 0$
of $f''\left(\frac{1}{8}\pi\right) = -8\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -8 \cdot 0 = 0$

Vraag 3d - 3 punten

$f'(x) = -4\sin(2x)\cos(2x) \quad (= -2\sin(4x))$

$f'\left(\frac{1}{8}\pi\right) = -4\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -4\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -4\cdot\frac{1}{2} = -2$

of $f'\left(\frac{1}{8}\pi\right) = -2\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -2\cdot 1 = -2$

De buigraaklijn snijdt de *x*-as onder een hoek van $\tan^{-1}(2) \approx 63°$

De hoek met de *y*-as is dus $90° - 63° = 27°$

De hoek kan ook berekend worden met:

$\cos(\alpha) = \frac{\left(\binom{1}{-2}\binom{0}{1}\right)}{\left|\binom{1}{-2}\right|\cdot\left|\binom{0}{1}\right|} = \frac{1\cdot 0+(-2)\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot 1} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ *dus* $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 153°$

Vraag 3e - 7 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos^2(2x) = 4\frac{1}{2}\cos(2x) - 2 \Leftrightarrow \cos^2(2x) - 4\frac{1}{2}\cos(2x) + 2 = 0$

De substitutie $y = \cos(2x)$ geeft

$y^2 - 4\frac{1}{2}y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4\frac{1}{2}\pm\sqrt{20\frac{1}{4}-8}}{2} = \frac{4\frac{1}{2}\pm 3\frac{1}{2}}{2} of\ (y-4)\left(y-\frac{1}{2}\right) = 0,$

dus $\cos(2x) = y = 4$ of $\cos(2x) = y = \frac{1}{2}$

$\cos(2x) = 4$ heeft geen oplossingen

$\cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$

Dit geeft $2x = \pm\frac{1}{3}\pi + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{6}\pi + k\cdot\pi$

Oplossingen met $0 \le x \le \pi$: $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = -\frac{1}{6}\pi + \pi = \frac{5}{6}\pi$

Vraag 4a - 6 punten

$M(15,5)$ is het middelpunt van *c* en de straal van *c* is $r = \sqrt{25} = 5$

Een normaalvector van lijn *m* is $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, want $\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right) = -12 + 12 = 0$

Een vectorvoorstelling van de lijn door *M* die loodrecht op *m* staat is dus $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}15 - 4\mu = 0 + 3\lambda\\5 + 3\mu = 10 + 4\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4\mu - 3\lambda = -15\\3\mu - 4\lambda = 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-12\mu - 9\lambda = -45\\12\mu - 16\lambda = 20\end{cases}$

Deze vergelijkingen optellen geeft $-25\lambda = -25 \Leftrightarrow \lambda = 1$ (en $\mu = 3$)

Het snijpunt *S* van deze lijnen is dus $(0 + 3, 10 + 4) = (3,14)$ $(= (15 + 3 \cdot (-4), 5 + 3 \cdot 3))$

$d(S,M) = \sqrt{(15-3)^2 + (5-14)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$ $(= 3r)$

Dit geeft $d(m,c) = d(S,c) = 15 - r = 15 - 5 = 10$

of $d(m,c) = d(S,c) = 3r - r = 2r = 2 \cdot 5 = 10$

Alternatief met vergelijkingen van de lijnen

Een normaalvector van lijn *m* is $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, want $\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right) = -12 + 12 = 0$

of de richtingscoëfficiënt van lijn *m* is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$

Een vergelijking voor lijn *m* is $-4x + 3y = 30$ of $y = \frac{4}{3}x + 10$`

Een vergelijking voor de lijn door *M* die loodrecht op *m* staat is $3x + 4y = 65$

of $y = -\frac{3}{4}x + 16\frac{1}{4}$

$\begin{cases}-4x + 3y = 30\\3x + 4y = 65\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-12x + 9y = 90\\12x + 16y = 260\end{cases} \Rightarrow 25y = 350 \Leftrightarrow y = 14$ en $x = 3$

of $\frac{4}{3}x + 10 = -\frac{3}{4}x + 16\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{16}{12}x + \frac{9}{12}x = 6\frac{1}{4} \Leftrightarrow 25x = 6\frac{1}{4} \cdot 12 = 75 \Leftrightarrow x = 3$ en $y = 14$

$d(S,M) = \sqrt{(15-3)^2 + (5-14)^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$

Dit geeft $d(m,c) = d(S,c) = 15 - r = 15 - 5 = 10$

Alternatief met de afstandsformule

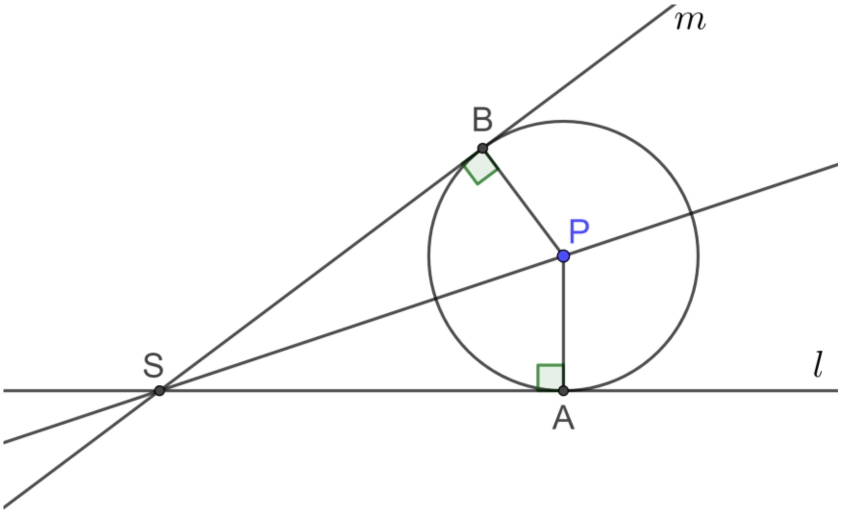
Een vergelijking voor lijn *m* is $-4x + 3y = 30 \Leftrightarrow -4x + 3y - 30 = 0$

De afstandsformule $d(M,m) = \frac{|a \cdot x_M + b \cdot y_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ geeft dan

$$d(M,m) = \frac{|-4 \cdot 15 + 3 \cdot 5 - 30|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{|-60 + 15 - 30|}{\sqrt{25}} = \frac{75}{5} = 15$$

Dit geeft $d(m,c) = 15 - r = 15 - 5 = 10$

Vraag 4b - 6 punten



Voor een cirkel met twee raaklijnen geldt dat de lijn door het snijpunt van de raaklijnen *S* en het middelpunt van de cirkel *P* een bissectrice is van de raaklijnen

Dit staat als cirkeleigenschap in de boeken, dus hoeft niet aangetoond worden.
Het kan indien gewenst als volgt aangetoond worden:
$d(A,P) = d(P,B)$ *en* SP *is een gemeenschappelijke zijde van de rechthoekige driehoeken* SPA *en SPB. Daaruit volgt dat* $d(S,A) = d(S,B)$, *dus zijn deze driehoeken gelijkvormig.*
Dit geeft $\angle PSA = \angle PSB$.

Lijn *l* is de lijn die ook raakt aan de cirkel met middelpunt *Q*.
Neem nu voor *S* het snijpunt van *l* met de lijn door *P* en *Q* en trek de raaklijn *m* vanuit *S* naar punt *B*

De lijn door *S* en *Q* is een bissectrice van de raaklijnen uit *S* aan de cirkel met middelpunt *Q*.
Als we de raakpunten *C* en *D* noemen, met *C* op lijn *l*, dan geldt:
$\angle QSD = \angle QSC = \angle PSA = \angle PSB$, dus is *m* ook raaklijn aan de cirkel met middelpunt *Q*

.

Vraag 5a - 5 punten

$f(x) - g(x) = \ln(3) \Leftrightarrow \ln(2x+1) - \frac{1}{2}\ln(x) = \ln(3) \Leftrightarrow \ln(2x+1) - \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \ln(3)$

Dit geeft $\ln\left((2x+1)/\sqrt{x}\right) = \ln(3)$

Hieruit volgt $(2x+1)/\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow (4x^2+4x+1)/x = 9 \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 = 9x \Leftrightarrow 4x^2-5x+1 = 0$

Oplossingen: $x = \frac{5+\sqrt{9}}{8} = 1$ en $x = \frac{5-\sqrt{9}}{8} = \frac{1}{4}$

Kan ook met de substitutie $y = \sqrt{x}$:
$2y^2+1 = 3y \Leftrightarrow 2y^2-3y+1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = \frac{1}{2}$, dus $x = 1^2 = 1$ of $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Vraag 5b - 5 punten

$h_{ab}(0) = 0 \Leftrightarrow a + \mathrm{e}^0 = 0 \Leftrightarrow a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$

$f'(x) = \dfrac{2}{2x+1}$

Dit geeft $f'(0) = 2$, dus moet ook gelden $h'_{ab}(0) = 2$

$h'_{ab}(x) = b\mathrm{e}^{bx}$

$h'_{ab}(0) = 2$ geeft dan $b \cdot \mathrm{e}^0 = 2 \Leftrightarrow b \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow b = 2$

Vraag 5c - 6 punten

$\pi \cdot \int_0^{\ln(2)} \left(h_{31}(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\ln(2)} (3+\mathrm{e}^x)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\ln(2)} 9 + 6\mathrm{e}^x + (\mathrm{e}^x)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\ln(2)} 9 + 6\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} \mathrm{d}x$

$= \pi \cdot \left[9x + 6\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln(2)} = \pi \cdot \left(9\ln(2) + 6\mathrm{e}^{\ln(2)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln(2)} - \left(0 + 6\mathrm{e}^0 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^0\right)\right)$

$= \pi \cdot \left(9\ln(2) + 6 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 - \left(0 + 6 + \frac{1}{2}\right)\right) = \pi \cdot \left(9\ln(2) + 7\frac{1}{2}\right)$

