Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 17-7-2021

Vraag 1a - 5 punten

$f'(x) = 4x^3 + 6x - 4x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (4x^2 + 6x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 + 6x - 4 = 0$

$4x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{8} = \frac{-6\pm 10}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{16}{8} = -2$ of $x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Kan ook met de abc-formule in $2x^2 + 3x - 2 = 0$ *of met ontbinden in factoren:*

$4x^2 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 + 3 \cdot 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(2x + 4) = 0$;
$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 2) = 0$.

Oplossingen: $x = 0$, $x = -2$ en $x = \frac{1}{2}$

Vraag 1b - 5 punten

$$3 \cdot 2^x = 12^x \Leftrightarrow \frac{12^x}{2^x} = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{12}{2}\right)^x = 3 \Leftrightarrow 6^x = 3 \Leftrightarrow x = {}^{6}\log 3 \approx 0{,}61$$

Vraag 1c - 5 punten

$$k'(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 - 4}} = 3 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 4}} = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3x^2 - 4}$$

$$\Rightarrow x^2 = 3x^2 - 4 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

$x = -\sqrt{2}$ voldoet niet (want $k'(-\sqrt{2}) = -3$), dus enige oplossing $x = \sqrt{2}$

Vraag 2a - 5 punten

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{100 \cdot (400 + t^2) - 100t \cdot 2t}{400 + t^2}$$

$\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow 100 \cdot (400 + t^2 - 2t^2) = 0 \Leftrightarrow 400 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 400$

Dit geeft $t = 20$ en $P = 100 \cdot \frac{20}{400+400} = \frac{2000}{800} = 2{,}5$

Vraag 2b - 5 punten

$P = 2 \Leftrightarrow 100t = 2(400 + t^2) \Leftrightarrow 100t = 800 + 2t^2 \Leftrightarrow 2t^2 - 100t + 800 = 0$

De oplossingen van deze vergelijking zijn $t = 10$ en $t = 40$

Kan met $t^2 - 50t + 400 = 0 \Leftrightarrow (t - 10)(t - 40) = 0$ *of met de abc-formule.*

Het percentage is dus 30 dagen boven de 2

Vraag 3a - 3 punten

De som is 7 bij uitkomsten $6+1$, $5+2$ en $4+1$

$P(6+1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$; $P(5+2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}$; $P(4+3)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}$

De gevraagde kans is dus $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}$ $\left(=\frac{1}{6}\approx 0{,}1667\right)$

Kan ook door een kruistabel te maken met 6 x 6 uitkomsten en aan te geven dat de som 7 is bij 6 van de 36 uitkomsten in deze tabel

Vraag 3b - 5 punten

$P(even\ som)=P(oneven+oneven)+P(even+even)=\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$;

de kans op een oneven som is (dus) ook $\frac{1}{2}$

Kan ook door aan te geven dat de som bij de helft van de vakjes in de 6 x 6 kruistabel even is.

Het spelletje is precies in de vierde ronde afgelopen bij de volgende winnaars per ronde:

AABA; ABAA; BAAA; BBAB, BABB, ABBB (A = Astrid, B = Bartje)

Voor elk van deze mogelijkheden is de kans $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

De gevraagde kans is dus $6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

Vraag 3c - 1 punt

H_0: $p=\frac{1}{6}$; H_1: $p>\frac{1}{6}$

Vraag 3d - 4 punten

Bij een eerlijke dobbelsteen is X, het aantal keer dat 1 geworpen wordt,
binomiaal verdeeld met $n=36$ en $p=\frac{1}{6}$.

$$P(X=10)=\binom{36}{10}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{26}=254186856\cdot\frac{5^{26}}{6^{36}}\approx 0{,}03672$$

Mag in één keer op de rekenmachine.

Vraag 3e - 2 punten

Om een conclusie te kunnen trekken moet je ook de onbetrouwbaarheidsdrempel weten en moet je de overschrijdingskans $P(X\geq 10)$ weten. *Eén van beide redenen volstaat!*

Vraag 4a - 4 punten

De groeifactor over 11 jaar is $\frac{15}{2}$, de groeifactor over één jaar is dus $\sqrt[11]{\frac{15}{2}}$

Dit is (afgerond) gelijk aan $1{,}201022$

Het bijbehorende groeipercentage is $(1{,}201022 - 1) \times 100 = 20{,}1022$

Vraag 4b - 2 punten

$90 = \mu + 3\sigma$, $70 = \mu - 3\sigma$ en de oppervlakte onder de kromme rechts van $\mu + 3\sigma$ en rechts van $\mu - 3\sigma$ is vrijwel gelijk aan 0

Vraag 4c - 4 punten

81 dagen en 16 uur is 80 dagen + $1\frac{2}{3}$ dag, dit komt overeen met $\mu + \frac{1}{2}\sigma$

Hierbij horen de getallen $0{,}023 + 0{,}136 + 0{,}150 + 0{,}191 + 0{,}191$ $(= 0{,}5 + 0{,}191)$

Antwoord $69{,}1\%$

Vraag 4d - 3 punten

$\mu_T = 20 \times \mu = 20 \times 80 = 1600;$ $\sigma_T = \sqrt{20} \times \sigma = \sqrt{20} \times \frac{10}{3} \approx 14{,}9071$

Vraag 5a - 5 punten

Op het punt waar D minimaal is geldt $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t = 0$

$\mathrm{d}D/\mathrm{d}t = [5 - t]' \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05t} + (5 - t) \cdot [\mathrm{e}^{-0{,}05t}]'$ met $[\mathrm{e}^{-0{,}05t}]' = -0{,}05\mathrm{e}^{-0{,}05t}$

Dit geeft $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-0{,}05t} - 0{,}05(5 - t)\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}$

$t = 25$ geeft $\mathrm{d}D/\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-1{,}25} - 0{,}05 \cdot (-20)\mathrm{e}^{-1{,}25} = -\mathrm{e}^{-1{,}25} + \mathrm{e}^{-1{,}25} = 0$

Vraag 5b - 2 punten

Op den duur wordt de term met de e-macht 0. Dit geeft $D = 10$

Vraag 5c - 4 punten

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ geeft $r^3 = V \cdot \frac{3}{4\pi}$. Met $V = 33{,}51$ geeft dit $r = \sqrt[3]{33{,}51 \cdot \frac{3}{4\pi}} \approx \sqrt[3]{8{,}000} = 2$

De hoogte van het reservoir is de gevonden r plus de waarde van D op $t = 0$

Dat is $2 + 10 + 5 \cdot \mathrm{e}^0 = 2 + 10 + 5 = 17$ cm

Vraag 6a - 4 punten

Berekening a en b:

$$a = evenwichtsstand = \frac{minimum + maximum}{2} = \frac{25 + 12}{2} = 18\tfrac{1}{2}$$

$$b = amplitude = \frac{minimum - maximum}{2} = \frac{25 - 12}{2} = 6\tfrac{1}{2} \quad (= 25 - a = a - 12)$$

Kan ook als volgt:

D is maximaal als de sinus 1 is en is minimaal als de sinus –1 is.
Dit geeft $\begin{cases} a + b = 25 \\ a - b = 12 \end{cases}$

Dit stelsel oplossen met eliminatie en/of substitutie geeft $a = 18\frac{1}{2}$ en $b = 6\frac{1}{2}$

Berekening c:

Tussen een maximum en een minimum zit een halve periode.

De periode van D is dus $2 \times 12 = 24$

Dit geeft $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$ $(\approx 0{,}2618)$

Vraag 6b - 4 punten

De periode van D is 24. D is dus ook gelijk aan 15,25 cm op $t = 8 + 24 = 32$

$t = 8$ is 4 seconden voordat het minimum bereikt wordt, ofwel 1/3 van de periode
D is dus 4 seconden nadat het minimum bereikt is, ofwel op 2/3 van de periode, weer gelijk aan 15,25, dat is op $t = 12 + 4 = 16$ ofwel op $t = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$

Het derde tijdstip is $t = 16 + 24 = 40$