Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 15-12-2020

Vraag 1a - 4 punten

$f(x) = 4x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 4x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 4) = 0$

Dit geeft $x = 0$ of $x^2 - 3x - 4 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 4$

Mag uiteraard ook met de abc-formule.

De coördinaten van de snijpunten zijn $(0,0)$, $(-1,-4)$ en $(4,16)$

Vraag 1b - 5 punten

Op te lossen: $f'(x) = 4$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36+48}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{6+\sqrt{84}}{6} \approx$ 2,53 of $x = \frac{6-\sqrt{84}}{6} \approx -0{,}53$

Vraag 1c - 5 punten

$g'(x) = \frac{6x \cdot 2x - (3x^2+12) \cdot 2}{(2x)^2}$

$g'(a) = 0$ geeft dus $12a^2 - (3a^2 + 12) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 6a^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$

Alternatief:

$g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}$, dus $g'(x) = \frac{3}{2} - \frac{6}{x^2}$

$g'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{6}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$

Vraag 1d - 4 punten

$h'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-x} + x^2 \cdot [\mathrm{e}^{-x}]' = 2x \cdot \mathrm{e}^{-x} - x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$ geeft $h'(1) = 2 \cdot \mathrm{e}^{-1} - 1 \cdot \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$ $(\approx 0{,}368)$

Vraag 2a - 2 punten

$P = R - QC = 4 + 10\sqrt{Q} - Q\left(3 + \frac{11}{Q}\right) = 4 + 10\sqrt{Q} - (3Q + 11)$

... $= 4 + 10\sqrt{Q} - 3Q - 11 - 3Q + 10\sqrt{Q} + 4 - 11 = -3Q + 10\sqrt{Q} - 7$

Vraag 2b - 5 punten

$P = 0 \Leftrightarrow -3Q + 10\sqrt{Q} - 7 = 0$ kun je oplossen met de substitutie $y = \sqrt{Q}$

Dit geeft $-3y^2 + 10y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-10 \pm \sqrt{100-84}}{-6} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = \frac{7}{3} \Rightarrow Q = 1 \vee Q = \frac{49}{9}$

De winst is positief voor $1 < Q < \frac{49}{9}$

Alternatieve oplossing van de vergelijking $P = 0$:

$P = 0 \Leftrightarrow -3Q + 10\sqrt{Q} - 7 = 0 \Leftrightarrow 10\sqrt{Q} = 3Q + 7$ kun je oplossen door links en rechts te kwadrateren

Dit geeft $\left(10\sqrt{Q}\right)^2 = (3Q+7)^2 \Leftrightarrow 100Q = 9Q^2 + 42Q + 49$

... $\Leftrightarrow 9Q^2 - 58Q + 49 = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{58 + \sqrt{58^2 - 4 \cdot 9 \cdot 49}}{2 \cdot 9} = \frac{58+40}{18} = \frac{49}{9} \vee Q = \frac{58-40}{18} = 1$

Vraag 2c - 4 punten

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}Q = -3 + \frac{10}{2\sqrt{Q}} = -3 + \frac{5}{\sqrt{Q}}$$

$$\mathrm{d}P/\mathrm{d}Q = 0 \Leftrightarrow 3 = \frac{5}{\sqrt{Q}} \Leftrightarrow 3\sqrt{Q} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{Q} = \frac{5}{3} \Rightarrow Q = \frac{25}{9}$$

Vraag 3a - 4 punten

$A = \frac{70+40}{2} = 55$; $B = 70 - 55 = 55 - 40 = \frac{70-40}{2} = 15$; $C = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$

Vraag 3b - 4 punten

Op $t = 0{,}58 + 5$ is de sensor weer op dezelfde hoogte, dat is op $t = 5{,}58$

Op $t = 2{,}50 - 0{,}58 = 1{,}92$ is de sensor ook op dezelfde hoogte

Het derde tijdstip is $t = 1{,}92 + 5 = 6{,}92$

Vraag 4a - 3 punten

Er zijn $6! = 720$ mogelijkheden om zes blokjes neer te leggen
Daarvan zijn er telkens $3! = 6$ identiek
Sietse kan zijn blokjes dus op $6!/3! = 720/6 = 120$ manieren neerleggen

Alternatief 1:
Leg eerst de drie blokjes neer die uniek zijn, dit kan op $6 \cdot 5 \cdot 4$ manieren
De overige drie plaatsen zijn voor de drie identieke blokjes
Het aantal verschillende volgordes is dus $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 = 120$

Alternatief 2:
De identieke blokjes kunnen op $\binom{6}{3} = 20$ manieren neergelegd worden
De unieke blokjes kunnen daarna op $3! = 6$ manieren neergelegd worden
De zes blokjes kunnen dus op $\binom{6}{3} \cdot 3! = 20 \cdot 6 = 120$ manieren worden neergelegd

Vraag 4b - 3 punten

Er zijn in totaal 108 blokjes in 6 kleuren, dus er zijn $108/6 = 18$ groene blokjes.
Ook: Er zijn groene blokjes is 6 verschillende vormen, elk van deze blokjes komt 3 keer voor.

Als het eerste blokje groen is, zijn er dus nog 17 groene blokjes over en in totaal zijn er dan nog 107 blokjes over

De gevraagde kans is dus $17/107$ ($\approx 0{,}159$)

Vraag 4c - 5 punten

Volgens de vuistregels heeft 68% een gewicht tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$

en heeft 95% een gewicht tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$

$5{,}2 = 5{,}8 - 0{,}6 = \mu - 2\sigma$; $6{,}1 = 5{,}8 + 0{,}3 = \mu + \sigma$

De verdeling is symmetrisch, dus $(100\% - 68\%)/2 = 16\%$ heeft een gewicht boven 6,1 g

en $(100\% - 95\%)/2 = 2{,}5\%$ heeft een gewicht onder 5,2 g.

Dit betekent dat $100\% - 16\% - 2{,}5\% = 81{,}5\%$ een gewicht heeft tussen 5,2 g en 6,1 g

Andere redeneringen mogelijk..

Dat zijn $0{,}815 \cdot 108 = 88{,}02$ blokjes

Vraag 4d - 5 punten

X, het aantal blokjes dat meer dan 5,8 g weegt, is binomiaal verdeeld met $n = 6$; $p = 0{,}5$

$P(X = 4) = \binom{6}{4} \cdot 0{,}5^4 \cdot 0{,}5^2 = \frac{15}{64} = 0{,}234375 \ \left(= \binom{6}{4} \cdot 0{,}5^6\right)$

Vraag 5a - 2 punten

H_0: $\mu = 5{,}8$; H_1: $\mu \neq 5{,}8$

Vraag 5b - 3 punten

De toetsingsgrootheid T is normaal verdeeld met $\mu_T = 5.8$ en $\sigma_T = 0{,}3/\sqrt{25} = 0{,}06$

Mag ook met de som van de gewichten, dan geldt $\mu_T = 5{,}8 \cdot 25 = 145$ *en* $\sigma_T = 0{,}3 \cdot \sqrt{25} = 1{,}5$

Vraag 5c - 2 punten

$0{,}048 > \frac{1}{2}\alpha = 0{,}025$, dus wordt de nulhypothese niet verworpen

Vraag 6a - 5 punten

De groeifactor over 1 week is $g = 43\,903/27\,485 \approx 1{,}597344$

$g^t = 2 \Leftrightarrow t = {}^{g}\log(2)$ of $t = \log(2)/\log(g)$

De verdubbelingstijd in weken is dus $1{,}4800$, dat is $1{,}48 \cdot 7 = 10{,}36$ dagen

Alternatief:

De groeifactor over 1 dag is $g = (43\,903/27\,485)^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}069195$

$g^t = 2 \Leftrightarrow t = {}^{g}\log(2)$ of $t = \log(2)/\log(g)$

De verdubbelingstijd is dus $10{,}36$ dagen

Vraag 6b - 5 punten

$$N = 100 \Leftrightarrow \frac{30\,000}{1 + 2\mathrm{e}^{0{,}1t}} = 100 \Leftrightarrow 30\,000 = 100(1 + 2\mathrm{e}^{0{,}1t}) \Leftrightarrow 1 + 2\mathrm{e}^{0{,}1t} = 300$$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{0{,}1t} = 299 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0{,}1t} = 149{,}5$

Dit geeft $0{,}1t = \ln(149{,}5) \Leftrightarrow t = \ln(149{,}5)/0{,}1 \approx 50{,}08$ dagen

50 dagen na 1 november is 20 december

