Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 22-7-2024

Vraag 1a - 5 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 15x + 4 = 3x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 7x + 12) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 7x + 12 = 0$

$x = 0$ geeft $f(x) = g(x) = 4$, dus snijpunt $(0,4)$.

$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 4$ (*mag uiteraard ook met de abc-formule)*

$x = 3$ geeft $f(x) = g(x) = 13$, $x = 4$ geeft $f(x) = g(x) = 16$, dus snijpunten $(3,13)$ en $(4,16)$.

Vraag 1b - 4 punten

$h'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}} \quad \Rightarrow \quad h'(2) = \dfrac{2 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{4+5}} = \dfrac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

Vraag 1c - 4 punten

$x + y = 3 \Leftrightarrow y = 3 - x$, dus op te lossen is $\sqrt{x^2+5} = 3 - x$

Kwadrateren geeft $x^2 + 5 = (3-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 5 = 9 - 6x + x^2 \Leftrightarrow 5 = 9 - 6x \Leftrightarrow 6x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

$x = \frac{2}{3}$ geeft $y = 3 - x = 2\frac{1}{3}$, dus snijpunt $\left(\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}\right)$.

Vraag 1d - 4 punten

Tussen de eerste twee rijen van de tabel geldt $\Delta G/\Delta t = (3{,}6 - 1{,}2)/(7-3) = 2{,}4/4 = 0{,}6$
Tussen de tweede en de derde rij geldt $\Delta G/\Delta t = (6{,}0 - 3{,}6)/(10-7) = 2{,}4/3 = 0{,}8$
Bij een lineair verband zijn deze uitkomsten gelijk, dus er is geen lineair verband.

Tussen de eerste twee rijen van de tabel geldt $g = \sqrt[4]{G(7)/G(3)} = \sqrt[4]{3{,}6/1{,}2} = \sqrt[4]{3} \approx 1{,}316$

Tussen de tweede en de derde rij geldt $g = \sqrt[3]{G(10)/G(7)} = \sqrt[3]{6{,}0/3{,}6} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \approx 1{,}186$

Bij een exponentieel verband zijn deze uitkomsten gelijk, dus er is ook geen exponentieel verband

Vraag 2a - 4 punten

$N = 4000 \Leftrightarrow 50\,000\,t/(t^2+25) = 4000 \Leftrightarrow 50\,000t = 4000(t^2+25)$

$\Leftrightarrow \frac{50000}{4000}t = t^2 + 25 \Leftrightarrow 12{,}5t = t^2 + 25 \Leftrightarrow t^2 - 12{,}5t + 25 = 0$

Dit geeft $t = (12{,}5 \pm \sqrt{156{,}25 - 100})/2 = (12{,}5 \pm 7{,}5)/2$

$t = (12{,}5 - 7{,}5)/2 = 5/2 = 2\frac{1}{2}$, dat is in 1982

$t = (12{,}5 + 7{,}5)/2 = 20/2 = 10$, dat is in 1990

Vraag 2b - 5 punten

$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \dfrac{50\,000 \cdot (t^2+25) - 50\,000t \cdot 2t}{(t^2+25)^2}$

$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow 50\,000t^2 + 50\,000 \cdot 25 - 50\,000 \cdot 2t^2 = 0 \Leftrightarrow 25 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5$

$t = 5$ geeft $N = \frac{50\,000 \cdot 5}{25+25} = 5\,000$

Vraag 2c - 5 punten

$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = 1 \cdot \mathrm{e}^{8-0{,}16t} + t \cdot \mathrm{e}^{8-0{,}16t} \cdot -0{,}16 = \mathrm{e}^{8-0{,}16t} - 0{,}16t \cdot \mathrm{e}^{8-0{,}16t} = (1-0{,}16t)\mathrm{e}^{8-0{,}16t}$

$t = 5$ geeft $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = (1-0{,}16 \cdot 5)\mathrm{e}^{8-0{,}16\cdot 5} = (1-0{,}8)\mathrm{e}^{8-0{,}8} = 0{,}2\mathrm{e}^{7{,}2}$

Vraag 2d - 2 punten

Op $t = 5$ geldt $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = 0{,}2\mathrm{e}^{7{,}2} > 0$

Het aantal nieuwe besmettingen neemt dus op $t = 5$ nog toe, de piek ligt dus later dan $t = 5$

Alternatief: $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}16t = 0.$ Dit geeft $t = \frac{1}{0{,}16} = 6{,}25 > 5$

Vraag 3a - 4 punten

$a = evenwichtsstand = \frac{70+40}{2} = 55$

$b = amplitude = 70 - 55 = 55 - 40 = \frac{70-40}{2} = 15$

$periode = 5 = \frac{2\pi}{c} \Leftrightarrow c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$

Vraag 3b - 5 punten

De periode van H is $\frac{2\pi}{0{,}25\pi} = 8$

Als $t - 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow t = 1{,}5$ gaat de grafiek van H **dalend** door de evenwichtsstand $H = 55$.

Het maximum wordt $\frac{3}{4}$ periode later bereikt, dat is op $t = 1{,}5 + \frac{3}{4} \cdot 8 = 1{,}5 + 6 = 7{,}5$.

Kan ook door op te lossen $\sin\big(0{,}25\pi(t-1{,}5)\big) = \sin(1{,}5\pi) \Rightarrow 0{,}25\pi(t-1{,}5) = 1{,}5\pi \Leftrightarrow t - 1{,}5 = 6$

De volgende twee tijdstippen waarop H maximaal is zijn $t = 7{,}5 + 8 = 15{,}5$ en $t = 15{,}5 + 8 = 23{,}5$

Vraag 4a - 5 punten

$P(eerste\ pro\ europees, tweede\ eurosceptisch, derde\ niet\ stemmer) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5$

Er zijn $3! = 6$ volgordes waarin de kiezers uitgenodigd kunnen worden.

De gevraagde kans is dus $6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}18$.

Vraag 4b - 2 punten

H_0: $p = 0{,}6$; H_1: $p > 0{,}6$

Vraag 4c - 4 punten

X, het aantal kiezers dat eurosceptisch zou stemmen in de steekproef, is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = 0{,}6$

$P(X = 64) = \binom{100}{64} \cdot 0{,}6^{64} \cdot 0{,}4^{36} \approx 0{,}059141$

Vraag 4d - 3 punten

De overschrijdingskans, $P(X \geq 64)$, is groter dan $P(X = 64) \approx 0{,}06$

De overschrijdingskans is zodoende zeker groter dan $\alpha = 0{,}05$

De nulhypothese wordt dus niet verworpen, er is onvoldoende reden om aan te nemen dat de partijleider gelijk heeft.

Vraag 5a - 4 punten

$218 = 226 - 8 = \mu - 2\sigma$; $230 = 226 + 4 = \mu + \sigma$
Het deel van de peren met een gewicht tussen deze grenzen is $0{,}136 + 0{,}150 + 0{,}191 + 0{,}191 + 0{,}150$
Dat is $0{,}818$ deel, ofwel 81,8%

Vraag 5b - 5 punten

T, het totale gewicht van een doos, is normaal verdeeld met $\mu_T = 10 \cdot 226 + 53 = 2313$ g
$\sigma_T^2 = 10 \cdot 4^2 + 3^2 = 169$, dus $\sigma_T = 13$ g
$2300 = 2313 - 13 = \mu_T - \sigma_T$
De oppervlakte die hierbij hoort in de figuur is $0{,}136 + 0{,}023$. Dat is $0{,}159$ deel, ofwel 15,9%.

Vraag 5c - 4 punten

De kans dat geen van beide peren rot is, is gelijk aan $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}$
De kans dat tenminste één peer rot is, is dus $1 - \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Alternatief:
De kans dat precies één van de twee peren rot is, is gelijk aan $\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{15}$
De kans dat beide peren rot zijn, is gelijk aan $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$
De kans dat tenminste één peer rot is, is dus $\frac{8}{15} + \frac{2}{15} = \frac{2}{3}$

Vraag 6a - 4 punten

$t = 0$ geeft $N = \frac{30}{2+3\cdot 1} = \frac{30}{5} = 6$; $t = 1$ geeft $N = \frac{30}{2+3\cdot \mathrm{e}^{-0{,}2}} \approx 6{,}7322$

Groeipercentage: $\frac{6{,}7322-6}{6} \times 100\% \approx 12{,}2\%$

Vraag 6b - 6 punten

$N = 10 \Leftrightarrow \dfrac{30}{2 + 3\mathrm{e}^{-0{,}2t}} = 10 \Leftrightarrow \dfrac{30}{10} = 2 + 3\mathrm{e}^{-0{,}2t} \Leftrightarrow 2 + 3\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 3 \Leftrightarrow 3\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}2t} = \frac{1}{3}$
Dit geeft $-0{,}2t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{1}{3}\right)/-0{,}2 \approx 5{,}493$ jaar
Dat is net voor de helft van 2015, dus in juni 2015.

Vraag 6c - 2 punten

Als t groot wordt, wordt $\mathrm{e}^{-0{,}2t}$ vrijwel 0
De maximumwaarde van N is zodoende $\frac{30}{2+3\cdot 0} = \frac{30}{2} = 15$,
er zijn dus maximaal 15 miljoen gebruikers

