Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 21-4-2022

Vraag 1a - 6 punten

$f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 5x - 7$ geeft $f'(x) = 8x^3 - 24x^2 + 18x + 5$

Op te lossen is dus $8a^3 - 24a^2 + 18a + 5 = 5 \Leftrightarrow 8a^3 - 24a^2 + 18a = 0$

$$8a^3 - 24a^2 + 18a = 0 \Leftrightarrow a(8a^2 - 24a + 18) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 8a^2 - 24a + 18 = 0$$

$8a^2 - 24a - 18 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{16} = \dfrac{24}{16}$

of $8a^2 - 24a + 18 = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 12a + 9 = 0 \Leftrightarrow (2a - 3)^2 = 0$

De oplossingen zijn dus $a = 0$ en $a = \frac{3}{2}$

Vraag 1b - 6 punten

$g'(x) = \dfrac{3 \cdot 4 \cdot 2x}{2\sqrt{4x^2 - 7}} = \dfrac{12x}{\sqrt{4x^2 - 7}}$

$g'(x) = 8 \Leftrightarrow \dfrac{12x}{\sqrt{4x^2 - 7}} = 8 \Leftrightarrow 12x = 8\sqrt{4x^2 - 7} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x = \sqrt{4x^2 - 7}$

Dit geeft $\frac{9}{4}x^2 = 4x^2 - 7 \Leftrightarrow -\frac{7}{4}x^2 = -7 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

Alleen $x = 2$ voldoet

Vraag 1c - 5 punten

$3 \cdot 2^x = \dfrac{1}{3} \cdot 4^x \Leftrightarrow 3 \cdot 3 = \dfrac{4^x}{2^x} \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{2}\right)^x = 9 \Leftrightarrow 2^x = 9$

Kan ook omgewerkt worden naar $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{9}$

Dit geeft $x = {}^{2}\log(9) \approx 3{,}1699$ (*of* $x = {}^{1/2}\log\left(\frac{1}{9}\right)$)

Vraag 2a - 3 punten

$t = \frac{1}{2}$ geeft $A = \frac{4510 \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{4} + 5} = 410$; $t = 1$ geeft $A = \frac{4510}{2+5} = 644{,}29$

De toename is dus $644{,}26 - 410 = 234{,}29$

Dat is een toename van $\frac{234{,}29}{410} \times 100\% \approx 57\%$

Vraag 2b - 5 punten

$A = 220 \Leftrightarrow \dfrac{4510t}{2t^2 + 5} = 220 \Leftrightarrow \dfrac{4510t}{220} = 2t^2 + 5 \Leftrightarrow 2t^2 - 20{,}5t + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow t = \frac{20{,}5 \pm \sqrt{20{,}5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} \Leftrightarrow t = \frac{20{,}5 \pm \sqrt{20{,}5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{20{,}5 \pm \sqrt{380{,}25}}{4} = \frac{20{,}5 \pm 19{,}5}{4}$$

De enige oplossing met $t > 1$ is $t = \frac{20{,}5+19{,}5}{4} = \frac{40}{4} = 10$

Vraag 2c - 5 punten

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4510(2t^2+5) - 4510t \cdot 4t}{(2t+5)^2} \frac{dA}{dt} = 0 \Leftrightarrow 4510(2t^2+5-4t^2) = 0 \Leftrightarrow 5 - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1{,}5811$, dat is 1 uur en $0{,}5811 \times 60 \approx 35$ minuten, ofwel 95 minuten

Vraag 3a - 4 punten

Bij de start van een spel worden er in totaal 14 van de 28 stenen gepakt. Dit kan op $\binom{28}{14}$ manieren.

Geen van beide spelers heeft een dubbele steen als deze 14 stenen gepakt worden uit de 21 stenen met twee verschillende aantallen ogen. Dit kan op $\binom{21}{14}$ manieren.

De kans dat geen van beide spelers een dubbele steen heeft, is dus
$\binom{21}{14}/\binom{28}{14}$ $(= 116280/40116600)$ $\approx 0{,}0029$

Vraag 3b - 4 punten

De kans dat er wel tenminste één dubbele steen gepakt wordt, is $1 - 0{,}0029 = 0{,}9971\mathrm{t}$
In dat geval hebben beide spelers evenveel kans om te mogen beginnen.
De kans dat Yassine het spel begint is dus $0{,}9971/2 = 0{,}49855$

Vraag 3c - 5 punten

Er zijn 19 stenen met 18 ogen, daarnaast nog 18 stenen met 17 ogen, etc.
Het totale aantal stenen is dus $19 + 18 + 17 + 16 + \cdots + 3 + 2 + 1$
Dit is de som van 19 termen van een rekenkundige rij met $u_e = 1$ en $u_l = 19$,
dus dit is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 19 \cdot (19 + 1) = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 = 19 \cdot 10 = 190$

Alternatief:

Het aantal stenen met twee verschillende aantallen ogen is $\binom{19}{2}$

Er zijn verder 19 dubbele stenen.

In totaal zijn er dus $\binom{19}{2} + 19 = 171 + 19 = 190$ stenen.

Vraag 3d - 3 punten

Er is één steen met in totaal 18 ogen (9 + 9)
Er is één steen met in totaal 17 ogen (9 + 8)
Er zijn twee steen met in totaal 16 ogen (9 + 7 en 8 + 8)
Er zijn twee stenen met in totaal 15 ogen (9 + 6 en 8 +7)
Er zijn drie stenen met in totaal 14 ogen (9 + 5, 8 + 6 en 7 + 7)
Er zijn drie stenen met in totaal 13 ogen (9 + 4, 8 + 5 en 6 + 7)
In totaal zijn er dus 12 stenen met meer dan 12 ogen.

Vraag 4a - 4 punten

$5{,}3 = 5{,}4 - 0{,}1 = \mu - \frac{1}{2}\sigma$; $5{,}8 = 5{,}4 + 0{,}4 = \mu + 2\sigma$

De kans op een steen met een gewicht tussen deze grenzen is dus
$0{,}191 + 0{,}191 + 0{,}150 + 0{,}136 = 0{,}668$

De kans dat alle 7 stenen een gewicht tussen deze grenzen hebben is zodoende $0{,}668^7$

Dit is afgerond gelijk aan $0{,}05935$

Vraag 4b - 2 punten

H_0: $\mu = 5{,}4$; H_1: $\mu \neq 5{,}4$

Vraag 4c - 4 punten

De toetsingsgrootheid is het gemiddelde gewicht G van de stenen in de steekproef.

$\mu_G = 5{,}4$ g; $\sigma_G = 0{,}2/\sqrt{36} = 0{,}2/6 = \frac{1}{30} \approx 0.0333$ g

Vraag 4d - 2 punten

Bij de alternatieve hypothese H_1: $\mu \neq 5{,}4$ moet de overschrijdingskans 0,03593 vergeleken worden met $\frac{1}{2}\alpha = 0{,}025$.

$0{,}03593 > \frac{1}{2}\alpha$, dus H_0 wordt niet verworpen.

Vraag 5a - 5 punten

Het verband tussen de luchtdruk P en de hoogte h wordt gegeven door een formule
van de vorm $P = b \cdot g^h$

Uit de gegevens volgt: $b \cdot g^1 = 890$ en $b \cdot g^5 = 542$

Hieruit volgt $\frac{b \cdot g^5}{b \cdot g^1} = \frac{542}{890} \Leftrightarrow g^{5-1} = \frac{542}{890} \Leftrightarrow g^4 = \frac{542}{890} \Leftrightarrow g = \left(\frac{542}{890}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}8834$

Uit $b \cdot g^1 = 890$ volgt $b = \frac{890}{g}$

De luchtdruk op hoogte nul is dus $b = \frac{890}{0{,}8834} \approx 1007$ hPa

Vraag 5b - 5 punten

$P = 1013 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}034h/273{,}15}$

Dit geeft $\mathrm{d}P/\mathrm{d}h = 1013 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}034h/273{,}15} \cdot -0{,}034/273{,}15$

$h = 1000$ geeft $\mathrm{d}P/\mathrm{d}h = 1013 \cdot \mathrm{e}^{-34/273{,}15} \cdot -0{,}034/273{,}15 \approx -0{,}1113$
De luchtdruk neemt dan dus af met $0{,}1113$ hPa/meter.

Vraag 5c - 4 punten

$P = 1013 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}034h/(t+273{,}15)} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}034h/(t+273{,}15)} = P/1013$

Dit geeft $-0{,}034h/(t + 273{,}15) = \ln(P/1013)$

Hieruit volgt $-0{,}034h = (t + 273{,}15) \cdot \ln(P/1013)$

Dus $h = -\frac{t+273{,}15}{0{,}034} \cdot \ln(P/1013)$

Vraag 6a - 5 punten

De maximale hoogte is 65 cm en de minimale hoogte is 10 cm

$a = evenwichtsstand = (65 + 10)/2 = 37{,}5$

$b = amplitude = 65 - a = 27{,}5 \quad (= a - 10 = (65 - 10)/2)$

Per seconde zijn er 3 omwentelingen, de periode van H is dus $\frac{1}{3}$ seconde.

Dit geeft $c = 2\pi/periode = 2\pi/\frac{1}{3} = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$

Vraag 6b - 4 punten

$periode = 2\pi/c = 2\pi/16 = 0{,}3937$ seconde

Het wiel maakt dus 1 omwenteling per 0,3937 seconde,
dat zijn $1/0{,}3937$ omwentelingen per seconde,
ofwel $3600 \times 1/0{,}3937 = 9167{,}3$ omwentelingen per uur.

Dat komt overeen met een afstand van $9167{,}3 \times 235 = 2\ 154\ 321$ cm

Kan ook berekend worden met $235 \times 1/0{,}3937 \times 3600$*.*

De snelheid is dus 21,5 km/uur.

