# Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 17-12-2021

## *Vraag 1a - 5 punten*

$f(x) = -\frac{9}{4}x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = -\frac{9}{4}x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + \frac{9}{4}x = 0$

$x\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$ of $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Gemeenschappelijke punten: $(0{,}4)$ en $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right)$

## *Vraag 1b - 6 punten*

$g'(x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = \sqrt{2x^2 + 1}$

Dit geeft $\frac{9}{4}x^2 = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 2 \lor x = -2$

Alleen $x = 2$ voldoet

## *Vraag 1c - 4 punten*

$D = 3 + 2\mathrm{e}^{P-1} \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{P-1} = D - 3 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{P-1} = \frac{1}{2}D - \frac{3}{2} \Leftrightarrow P - 1 = \ln\left(\frac{1}{2}D - \frac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow P = 1 + \ln\left(\frac{1}{2}D - \frac{3}{2}\right) = 1 + \ln\left(\frac{D-3}{2}\right) = 1 + \ln(D - 3) - \ln(2)$

Hieruit volgt $a = 1 - \ln(2)$ $(\approx 0{,}3067)$ en $b = 3$

## *Vraag 2a - 4 punten*

$A = 500 \Leftrightarrow \dfrac{5000t}{16 + t^2} = 500 \Leftrightarrow \dfrac{10t}{16 + t^2} = 1 \Leftrightarrow 10t = 16 + t^2 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 16 = 0$

Dit geeft $(t - 2)(t - 8) = 0$ of $t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2}$, dus $t = 2 \lor t = 8$

De website is gedurende $8 - 2 = 6$ minuten overbelast

## *Vraag 2b - 5 punten*

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{5000(16 + t^2) - 5000t \cdot 2t}{(16 + t^2)^2}$$

$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow 5000(16 + t^2 - 2t^2) = 0 \Leftrightarrow 16 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = 4$

$t = 4$ geeft $A = \frac{20000}{32} = 625$, dus zijn er maximaal 625 000 ingelogde bezoekers

## *Vraag 2c - 5 punten*

$\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = 1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t + 6{,}05} + t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t + 6{,}05} \cdot (-0{,}25) = (1 - 0{,}25t) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}25t + 6{,}05}$

$t = 5$ geeft $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = (1 - 1{,}25) \cdot \mathrm{e}^{-1{,}25 + 6{,}05} = -0{,}25 \cdot \mathrm{e}^{4{,}8}$ $(\approx -30{,}38)$

Dit is kleiner dan 0, dus het aantal ingelogde bezoekers neemt af op $t = 5$

 

## *Vraag 3a - 4 punten*

$\frac{3}{4} \times 284 = 213$ paren zijn naar verwachting succesvol bij de eerste poging

$\frac{1}{4} \times 284 = 71$ paren hebben naar verwachting geen succes, 10% daarvan is 7,1

$\frac{3}{4} \times 7{,}1 = 5{,}325$ paren zijn naar verwachting succesvol bij de tweede poging

Naar verwachting zijn er dus $213 + 5{,}325 = 218{,}325$ succesvolle broedpogingen

## *Vraag 3b - 2 punten*

$H_0$: $p = \frac{3}{4}$; $H_1$: $p \neq \frac{3}{4}$

## *Vraag 3c - 4 punten*

$X$, het aantal succesvolle broedparen, is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = \frac{3}{4}$.

$$P(X = 70) = \binom{100}{70} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{70} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{30} \approx 0{,}0458$$

## *Vraag 3d - 2 punten*

Bij de alternatieve hypothese $H_1$: $p \neq \frac{3}{4}$ moet de overschrijdingskans $P(X \leq 70)$ vergeleken worden met $\frac{1}{2}\alpha = 0{,}025$. $P(X \leq 70) \geq P(X = 70) > \frac{1}{2}\alpha$, dus $H_0$ wordt niet verworpen

## *Vraag 4a - 5 punten*

Volgens de vuistregels ligt 68% van de percentages tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$
en ligt 95% van de percentages tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$
Dit geeft $\mu - 2\sigma = 62{,}6$ en $\mu + 2\sigma = 69$
Hieruit volgt $\mu = \frac{62{,}6+69}{2} = 65{,}8$ en $\sigma = \frac{69-\mu}{2} = 1{,}6$ $\left(= \frac{69-62{,}6}{4} = \frac{\mu-62{,}6}{2}\right)$
$64{,}2 = 65{,}8 - 1{,}6 = \mu - \sigma$
Dit betekent dat $\frac{100-68}{2} = 16\%$ van de percentages kleiner is dan 64,2.
De kans op een percentage kleiner dan 64,2 was dus 0,16

## *Vraag 4b - 5 punten*

Het gewicht van een paartje is normaal verdeeld met $\mu = 180 + 200 = 380$ en $\sigma = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$385 = \mu + \frac{1}{2}\sigma$; $400 = \mu + 2\sigma$

De oppervlakte onder de grafiek tussen deze grenzen is $0{,}150 + 0{,}136 = 0{,}286$,
dus de gevraagde kans is 0,286 (ofwel 28,6%)

## *Vraag 4c - 5 punten*

Voor elk van de jongen is de kans om na 30 dagen nog te leven $0{,}99^{30} \approx 0{,}7397$

De kans dat een jong na 30 dagen niet meer leeft is dus $1 - 0{,}7399 = 0{,}2603$

De kans dat het eerste jong overleeft en het tweede niet is $0{,}7397 \times 0{,}2603 = 0{,}1925$

De kans dat het tweede jong overleeft en het eerste niet is ook $0{,}1925$

De kans dat er precies één jong overleeft is dus $2 \times 0{,}1925 = 0{,}385$

 

## *Vraag 5a - 4 punten*

Het percentage helmdragers neemt toe met 5 per 2 weken, dat is met 2,5 per week, of $\frac{5}{14}$ per dag.

$50 - 4 = 46$; $\frac{46}{5} = 9{,}2$; $\frac{46}{2{,}5} = 18{,}4$; $\frac{46}{\frac{5}{14}} = 128{,}8$

Het duurt dus $9{,}2 \times 2 \times 14 = 18{,}4 \times 7 \approx 129$ dagen om het percentage van 4 naar 50 te laten stijgen

## *Vraag 5b - 5 punten*

Het percentage helmdragers wordt gegeven door een formule van de vorm $p = b \cdot g^t$ met $b = 4$

De groeifactor over twee weken is $g = \frac{9}{4}$

$b \cdot g^t = 50 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^t = 50 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^t = 12{,}5$

Dit geeft $t = {}^{9/4}\log(12{,}5) \approx 3{,}1146$

Dat is $3{,}1146 \times 14 \approx 44$ dagen

*Kan ook met de groeifactor over één week,* $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$, *en over één dag,* $\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{14}} \approx 1{,}0596$

## *Vraag 5c - 5 punten*

$p = 50 \Leftrightarrow 180/(2 + 43 \cdot 2^{-t}) = 50 \Leftrightarrow 2 + 43 \cdot 2^{-t} = \frac{180}{50}$

$\Leftrightarrow 43 \cdot 2^{-t} = \frac{180}{50} - 2 \Leftrightarrow 43 \cdot 2^{-t} = 1{,}6 \Leftrightarrow 2^{-t} = \frac{1{,}6}{43} \Leftrightarrow 2^{-t} = 0{,}0372$

Dit geeft $-t = {}^{2}\log(0{,}0372)$, dus $t = -\,{}^{2}\log(0{,}0372) \approx 4{,}75$

## *Vraag 5d - 3 punten*

Als $t$ groot wordt, gaat $0{,}5^t$ naar 0. Dan gaat $p$ naar $\frac{180}{2+0} = 90$

$100 - 90 = 10\%$ van de fietsers zal op de lange duur geen helm dragen.

## *Vraag 6a - 2 punten*

De sinus is maximaal $1$ en minimaal $-1$

De hoogste waterstand is dus $4 + 3{,}5 = 7{,}5$ meter en de laagste is $4 - 3{,}5 = 0{,}5$ meter

## *Vraag 6b - 2 punten*

De periode in uren is $\frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$; de periode in minuten is $4\pi \cdot 60 \approx 753{,}98$

## *Vraag 6c - 4 punten*

7:52 is $7 \times 60 + 52 = 472$ minuten na $t = 0$

Dit is $472 - \frac{1}{2} \cdot 754 = 95$ minuten nadat de waterstand dalend door de 4 meter gaat

De waterstand gaat dus weer stijgend door de 1,5 meter op 95 minuten voordat hij weer stijgend door de 4 meter gaat, dat is 754 minuten na $t = 0$

Dat is op 659 minuten na $t = 0$, ofwel om 10:59 uur

 