CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde B

Datum: 17 juli 2021
Tijd: 140 minuten (2 uur en 20 minuten)
Aantal opgaven: 4

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Omdat de tijd voor dit tentamen teruggebracht is tot 140 minuten, is het aantal opgaven ook teruggebracht. Daardoor is het totale aantal punten dat behaald kan worden teruggebracht tot 72.

Te behalen punten per onderdeel:				
Opgave	1	2	3	4
a	5	5	3	4
b	5	4	2	6
c	4	7	6	8
d	5		3	
e	5			
Totaal	24	16	14	18
Cijfer $= \frac{\text{behaald aantal punten}}{8} + 1$ U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.				

Opgave 1 – Een functie van de graad –2

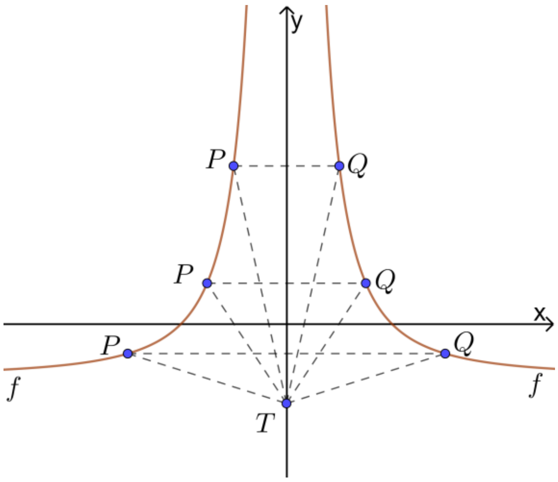
Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functie f is gegeven door

$$f(x) = \frac{4}{x^2} - 1$$

Op hoogte h, met $h > -1$, liggen horizontale lijnstukken PQ waarbij P op de linkerhelft van de grafiek van f ligt en Q op de rechterhelft. Samen met het punt $T\left(0, -1\frac{1}{2}\right)$ ontstaat zo voor iedere waarde van h een driehoek PQT.

In de figuur hieronder ziet u drie van deze driehoeken.



De lengte L van een lijnstuk PQ wordt gegeven door

$$L = \frac{4}{\sqrt{h+1}}$$

en de oppervlakte A van een driehoek PQT wordt gegeven door

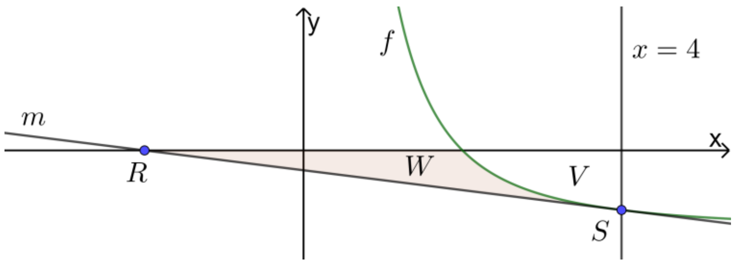
$$A = \frac{2h+3}{\sqrt{h+1}}$$

5pt **a** Toon dit aan.

5pt **b** Bereken exact de waarde van h waarvoor de oppervlakte van bijbehorende driehoek PQT minimaal is.

Vervolg opgave 1

In de figuur hieronder ziet u het rechterdeel van de grafiek van $f(x) = \frac{4}{x^2} - 1$.
S is het snijpunt van deze grafiek met de lijn $x = 4$ en *m* is de rechte lijn door punt S en punt $R(-2,0)$.
V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de *x*-as en de lijn $x = 4$.
W is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de *x*-as en lijn *m*.



Lijn *m* is de raaklijn aan de grafiek van f in punt S.

4pt c Toon dit aan.

V wordt gewenteld wordt rond de *x*-as. De inhoud van het omwentelingslichaam dat zo ontstaat is exact gelijk aan $\frac{7}{12}\pi$.

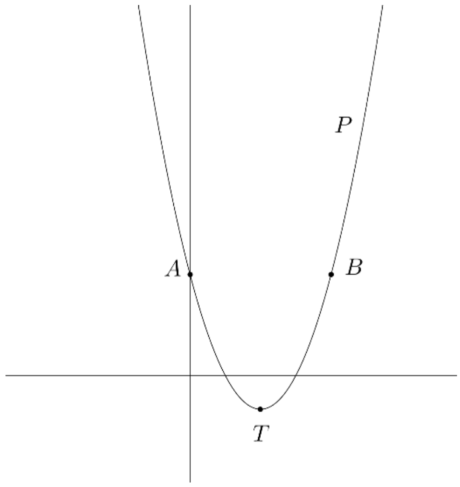
5pt d Toon dit aan.

5pt e Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als *W* rond de *x*-as wordt gewenteld.

Opgave 2 – Parabool, cirkels, lijn en driehoek

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Gegeven is de parabool *P* met vergelijking
$y = x^2 - 4x + 3$.
Punt *T* is de top van de parabool.
A en *B* zijn de punten van *P* waarvoor $y = 3$.
Zie de figuur hiernaast.



5pt a Bepaal met een exacte berekening een vergelijking voor de cirkel die door de punten *A*, *B* en *T* gaat.

Van een tweede cirkel is gegeven dat het middelpunt op de *x*-as ligt en dat deze cirkel de parabool *P* raakt in punt *A*.

4pt b Bereken exact de *x*-coördinaat van het middelpunt van deze cirkel.

De lijn *m* is gegeven door de vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Op lijn *m* liggen punten *C* waarvoor geldt dat driehoek *ABC* rechthoekig is.

7pt c Bereken exact de coördinaten van deze punten.

Opgave 3 – Functies met logaritmen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Voor elke reële waarde van k wordt de functie f_k gegeven door

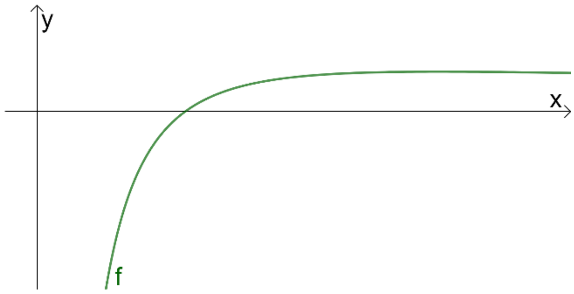
$$f_k(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x - k}.$$

Er is één waarde van k waarvoor de grafiek van f_k een perforatie (dat is een ophefbare discontinuïteit) heeft.

3pt **a** Bereken exact deze waarde van k.

In de rest van deze opgave nemen we $k = 0$.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie $f_0(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x}$.



De functie $F(x) = \ln^2(x) - \ln(x)$ is een primitieve van f_0.

2pt **b** Toon dit aan.

Voor iedere $a > 0$ is V_a het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f_0, de verticale lijn $x = a$ en de x-as.

6pt **c** Bereken exact de waarden van a waarvoor de oppervlakte van vlakdeel V_a gelijk is aan 4.

Verder worden de functies g en h gegeven door

$$g(x) = 3 - \ln\left(\frac{2}{x}\right) \quad \text{en} \quad h(x) = x \cdot f_0(x) - g(x)$$

Het functievoorschrift van h kan herleid worden tot de vorm $h(x) = \ln(bx)$.

3pt **d** Bereken exact de waarde van b.

Opgave 4 – Limaçon van Pascal

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een kromme gegeven door een parametervoorstelling van de vorm

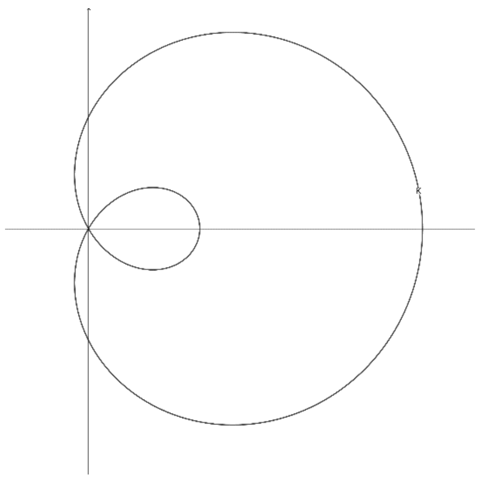
$$\begin{cases} x = (a + b\cos(t)) \cdot \cos(t) \\ y = (a + b\cos(t)) \cdot \sin(t) \end{cases}$$

met $0 \leq t \leq 2\pi$, $a \neq 0$ en $b \neq 0$ heeft de naam *Limaçon van Pascal*.
(*Genoemd naar Étienne Pascal, de vader van Blaise, die deze krommen als eerste uitgebreid onderzocht heeft.*)
De vorm van een dergelijke kromme hangt af van de waarden van a en b.

We nemen $a = 1$ en $b = 2$, zodat de parametervoorstelling wordt:

$$\begin{cases} x = (1 + 2\cos(t)) \cdot \cos(t) \\ y = (1 + 2\cos(t)) \cdot \sin(t) \end{cases}$$

In de figuur hiernaast ziet u de bijbehorende kromme. Deze kromme snijdt zichzelf in de oorsprong $O(0{,}0)$.



4pt a Bereken exact de waarden van t die bij dit punt horen.

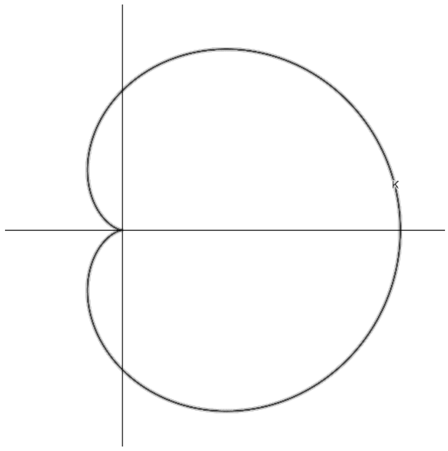
De kromme snijdt de *y*-as ook als $t = \frac{1}{2}\pi$.

6pt b Bereken algebraïsch de hoek waaronder de kromme de *y*-as snijdt als $t = \frac{1}{2}\pi$. Geef uw antwoord in graden.

Nemen we $a = b = 1$, dan wordt de parametervoorstelling

$$\begin{cases} x = (1 + \cos(t)) \cdot \cos(t) \\ y = (1 + \cos(t)) \cdot \sin(t) \end{cases}$$

De bijbehorende kromme ziet u weer hiernaast.



8pt c Bereken exact de coördinaten van het hoogste en het laagste punt van deze kromme.

Einde van het tentamen.

Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of ***uw naam*** *en het* ***opgavenummer*** *op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

Wat er ***niet*** *in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst wiskunde B

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$

$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$

$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$

$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$

$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$

$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$

