Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 17-4-2021

Vraag 1a - 6 punten

Er moet gelden $f\left(\frac{1}{2}\right) = g_{ab}\left(\frac{1}{2}\right) = -2$ en $f'\left(\frac{1}{2}\right) = g'_{ab}\left(\frac{1}{2}\right)$

$f'(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x-1} + (2x-3) \cdot 2\mathrm{e}^{2x-1}$, dus $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot 1 = -2$

$g'_{ab}(x) = 2x + a$, dus $g'_{ab}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + a$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = g'_{ab}\left(\frac{1}{2}\right)$ geeft dan $-2 = 1 + a \Leftrightarrow a = -3$

$g_{ab}\left(\frac{1}{2}\right) = -2$ geeft vervolgens $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}a + b = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} + b = -2 \Leftrightarrow b = -\frac{3}{4}$

Vraag 1b - 5 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (2x-3)\mathrm{e}^{2x-1} = 6x - 9 \Leftrightarrow (2x-3)\mathrm{e}^{2x-1} = 3(2x-3)$

Dit geeft $2x - 3 = 0$ of $\mathrm{e}^{2x-1} = 3$

$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{2}$, dus $x_1 = 1\frac{1}{2}$

$\mathrm{e}^{2x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = \ln(3) \Leftrightarrow 2x = \ln(3) + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(\ln(3) + \ln(\mathrm{e})) = \frac{1}{2}\ln(3\mathrm{e}) = \ln\left((3\mathrm{e})^{\frac{1}{2}}\right)$

$(3\mathrm{e})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3\mathrm{e}}$, dus $c = 3\mathrm{e}$

Vraag 1c - 5 punten

Spiegeling in de *x*-as geeft $f_1(x) = -f(x)$

Verticale vermenigvuldiging met 2 geeft $f_2(x) = 2f_1(x)$

Verticale verschuiving met 3 geeft $f_3(x) = f_2(x) + 3$

Horizontale verschuiving met 1 geeft $f_4(x) = f_3(x-1)$

Dit geeft: $h(x) = -2(2(x-1) - 3)\mathrm{e}^{2(x-1)-1} + 3$

Dit mag, maar hoeft niet te worden vereenvoudigd tot $h(x) = (-4x + 10)\mathrm{e}^{2x-3} + 3$

Vraag 2a - 5 punten

Er is een verticale asymptoot als de noemer gelijk is aan 0 en de teller niet

De noemer heeft twee nulpunten als $x^2 + a = 0$ twee oplossingen heeft, dat is het geval als $a < 0$

De teller is 0 als $x = 0$ of als $x = 2$

Voor $x = 0$ is de noemer 0 als ook $a = 0$, dan geen verticale asymptoot.
Voor $x = 2$ is de noemer 0 als $a = -4$, dan is er één verticale asymptoot ($x = -2$)

Er zijn dus twee verticale asymptoten als $a < 0 \wedge a \neq -4$

Vraag 2b - 5 punten

$$f_1(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + x - 2x^2 - x}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 1} = x - \frac{2x^2 + x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2$$

Je kunt ook eerst de staartdeling volledig uitwerken:

$$f_1(x) = x - \frac{2x^2 + 2 + x - 2}{x^2 + 1} = x - \frac{2(x^2 + 2) + x - 2}{x^2 + 1} = x - 2 - \frac{x - 2}{x^2 + 1} \to x - 2 - 0 \ (x \to \pm\infty)$$

De scheve asymptoot is zodoende $y = x - 2$

Alternatief

$$f_1'(x) = \frac{(3x^2 - 4x) \cdot (x^2 + 1) - (x^3 - 2x^2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 - 4x}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Dit geeft $\lim_{x \to \pm\infty} f_1{}'(x) = 1$

De scheve asymptoot heeft dus een vergelijking van de vorm $y = x + p$

$\lim_{x \to \pm\infty} (f_1(x) - x - p) = 0$ geeft dan

$$p = \lim_{x \to \pm\infty} (f_1(x) - x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1} - \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 1} = -2$$

De scheve asymptoot is zodoende $y = x - 2$

Vraag 3a – 7 punten

Met vectorvoorstelling lijn MB:

M is het punt $(-9{,}4)$ en c_2 heeft vergelijking $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$

De snijpunten van c_1 en de *y*-as vinden we door op te lossen $(0 + 9)^2 + (y - 4)^2 = 90$

of door op te lossen $(0 - 4)^2 + (y - 4)^2 = 25$

c_1 *en* c_2 *snijden geeft* $(x + 9)^2 - (x - 4)^2 = 90 - 25 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 81 - x^2 + 16x - 16 = 65 \Leftrightarrow x = 0$

Dit geeft $(y - 4)^2 = 9 \Leftrightarrow y - 4 = \pm 3 \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 7$

De lijn door $M(-9{,}4)$ en $B(0{,}7)$ heeft vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

$x = 9\lambda$ en $y = 7 + 3\lambda$ invullen in de vergelijking van c_2 geeft
$(9\lambda - 4)^2 + (3\lambda + 3)^2 = 25 \Leftrightarrow 81\lambda^2 - 72\lambda + 16 + 9\lambda^2 + 18\lambda + 9 = 25$

Hieruit volgt $90\lambda^2 - 54\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{54}{90} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\lambda = \frac{3}{5}$ geeft $x_C = 9 \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$

Vraag 3a met vergelijking lijn MB:

M is het punt $(-9{,}4)$ en c_2 heeft vergelijking $(x-4)^2+(y-4)^2=25$

De snijpunten van c_1 en de *y*-as vinden we door op te lossen $(0+9)^2+(y-4)^2=90$

of door op te lossen $(0-4)^2+(y-4)^2=25$

c_1 *en* c_2 *snijden geeft* $(x+9)^2-(x-4)^2=90-25 \Leftrightarrow x^2+2x+81-x^2+16x-16=65 \Leftrightarrow x=0$

Dit geeft $(y-4)^2=9 \Leftrightarrow y-4=\pm 3 \Leftrightarrow y=1 \vee y=7$

De lijn door $M(-9{,}4)$ en $B(0{,}7)$ heeft vergelijking $y=\frac{1}{3}x+7$

Voor de snijpunten met c_2 volgt dus $(x-4)^2+\left(\frac{1}{3}x+3\right)^2=25$

Hieruit volgt $x^2-8x+16+\frac{1}{9}x^2+2x+9=25 \Leftrightarrow \frac{10}{9}x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee \frac{10}{9}x-6=0$

Dit geeft $x_C=6\cdot\frac{9}{10}=\frac{54}{10}=5\frac{2}{5}$

Vraag 3b - 4 punten

$|PN|=8+5=13\ (=|QN|)$

Met $S=(-1{,}4)$ volgt: $|NS|=5$ en $|PN|^2=|PS|^2+|NS|^2\ (=|QN|^2)$

Dit geeft $|PS|=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12\ (=|QS|)$

De oppervlakte van driehoek NPQ is dus $\frac{1}{2}\cdot(|PS|+|QS|)\cdot|NS|=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 5=60$

$|PN|=|QN|=13$ *en* $|NS|=5$ *mogen ook met een tekening waarin de lengtes van de betreffende lijnstukken duidelijk zijn aangegeven worden toegelicht.*

Alternatief voor de tweede en derde regel:

Als je noteert $\mathrm{P}=(-1,y_1)$ en $\mathrm{Q}=(-1,y_2)$ dan zijn y_1 en y_2 de oplossingen van

$(-1-4)^2+(y-4)^2=13^2 \Leftrightarrow 25+y^2-8y+16=169 \Leftrightarrow y^2-8y-128=0 \Leftrightarrow y=16 \vee y=-8$

Dit geeft $|PQ|=16-(-8)=24$

Vraag 3c - 5 punten

M is het punt $(-9{,}4)$ en A is het punt $(0{,}1)$

Omdat $|MA|=|MD|$ volgt $\angle MDA=\angle MAD=45°$, dus $\angle AMD=90°$
Want gelijkbenige driehoek.

$\overrightarrow{MA}=\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$, dus de richtingsvector van MD is (een veelvoud van) $\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$
Want inproduct = 0, dus loodrecht.

Kan ook via de omweg: rico MA = $-\frac{1}{3}$*, rico MD is dus* 3 *(want product is* -1 *dus loodrecht)*

De richtingsvector van MD is (een veelvoud van) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Een vectorvoorstelling voor de lijn door M en D is dus $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$

Vraag 4a - 5 punten

Met tangens:

g heeft een maximum in $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\right)$, dus de helling van de grafiek van g in *A* is 0
Standaard eigenschap sinus, hoeft niet met differentiëren te worden aangetoond.

$f'(x) = 3\sin(3x)$, dus $f'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 3$

De hoek is dus $\tan^{-1}(3)$

Dat is $71{,}6° \approx 72°$

Met cosinusformule:

g heeft een maximum in $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\right)$
Standaard eigenschap sinus, hoeft niet met differentiëren te worden aangetoond.

De richtingsvector van de raaklijn aan g is dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f'(x) = 3\sin(3x)$, dus $f'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 3$

De richtingsvector van de raaklijn aan f is dus $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Dit geeft $\cos(\alpha) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1+0}{1 \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Dus $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 72°$

Vraag 4b - 7 punten

Een primitieve van f is $F(x) = x - \frac{1}{3}\sin(3x)$; een primitieve van g is $G(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$

De oppervlakte van *V* wordt gegeven door $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} f(x)\ \mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} g(x)\ \mathrm{d}x$

of door $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} f(x) - g(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} f(x)\ \mathrm{d}x$

Dit is gelijk aan $F\left(\frac{2}{3}\pi\right) - F\left(\frac{1}{6}\pi\right) - G\left(\frac{1}{3}\pi\right) + G\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi - 0 - \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}\pi$

Vraag 4c - 7 punten

Met overgang naar cosinusvergelijking:

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos\left(6x - \frac{1}{3}\pi\right)$

of $g(x) = h(x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\pi - 3x\right) = \cos\left(6x - \frac{1}{3}\pi\right)$

Beide geven $3x - \frac{1}{2}\pi = 6x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2 \lor \frac{1}{2}\pi - 3x = 6x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$3x - \frac{1}{2}\pi = 6x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$\frac{1}{2}\pi - 3x = 6x - \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -9x = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5}{54}\pi + k \cdot \frac{2}{9}\pi$

Oplossingen met $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$:

$\boldsymbol{\frac{5}{54}\pi}$, $\frac{5}{54}\pi + \frac{2}{9}\pi = \boldsymbol{\frac{17}{54}\pi}$; $\frac{5}{54}\pi + \frac{4}{9}\pi = \boldsymbol{\frac{29}{54}\pi}$; $-\frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{11}{18}\pi}$

Vraag 4c met overgang naar sinusvergelijking:

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(6x - \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)$

of $g(x) = h(x) \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \left(6x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

Beide geven $3x = 6x + \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \ \left(= \pi - \left(6x + \frac{5}{6}\pi\right)\right) \vee 3x = \frac{5}{6}\pi - 6x + k \cdot 2\pi \ \left(= \pi - \left(6x + \frac{1}{6}\pi\right)\right)$

$3x = 6x + \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -3x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$3x = \frac{5}{6}\pi - 6x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 9x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5}{54}\pi + k \cdot \frac{2}{9}\pi$

Oplossingen met $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$:

$\boldsymbol{\frac{5}{54}\pi}$, $\frac{5}{54}\pi + \frac{2}{9}\pi = \boldsymbol{\frac{17}{54}\pi}$; $\frac{5}{54}\pi + \frac{4}{9}\pi = \boldsymbol{\frac{29}{54}\pi}$; $-\frac{1}{18}\pi + \frac{2}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{11}{18}\pi}$

Vraag 5a - 5 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 2\ln(2x - 1) \Rightarrow \ln(x^2 + 1) = \ln((2x - 1)^2)$

Dit geeft $x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{4}{3}$

Alleen $x = \frac{4}{3}$ voldoet

Vraag 5b - 6 punten

$f(0) = \ln(1) = 0$, dus te berekenen $\pi \cdot \int_0^{\ln(5)} x^2 \, \mathrm{d}y$

$y = \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^2 + 1 = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x^2 = -1 + \mathrm{e}^y$

$$\pi \cdot \int_0^{\ln(5)} x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \cdot [-y + \mathrm{e}^y]_0^{\ln(5)} \ldots = \pi \cdot \left(-\ln(5) + e^{\ln(5)} - (0 + \mathrm{e}^0)\right) = \pi \cdot (-\ln(5) + 5 + 0 - 1)$$

$$= \pi \cdot (4 - \ln(5))$$

