Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 15-12-2020

Vraag 1a - 6 punten

Er moet gelden $f(1) = g_{ab}(1) = 3$ en $f'(1) = g_{ab}{}'(1)$

$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x^2-4)-(x^2-2x-8)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$ $\left(= \frac{2x^2+8x+8}{(x^2-4)^2} = \frac{2}{(x-2)^2}\right)$

of $f(x) = \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$ geeft $f'(x) = \frac{(x-2)-(x-4)}{(x-2)^2}$ $\left(= \frac{2}{(x-2)^2}\right)$

Dit geeft $f'(1) = 2$

$g'_{ab}(x) = 2ax$, dus $g'_{ab}(1) = 2a$

$f'(1) = g_{ab}{}'(1)$ geeft dan $2 = 2a \Leftrightarrow a = 1$

$g_{ab}(1) = 3$ geeft vervolgens $1 \cdot 1 + b = 3 \Leftrightarrow b = 2$

Vraag 1b - 6 punten

In een perforatie geldt $teller = 0$ en $noemer = 0$

$teller = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$, $noemer = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$
er is dus een perforatie voor $x = -2$

Voor $x \neq -2$ geldt $f(x) = \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$

Punten ook geven als dit niet hier, maar wel bij vraag a gevonden wordt.

De *y*-coördinaat van de perforatie is dus $f^*(-2) = \frac{-6}{-4} = 1\frac{1}{2}$

Vraag 2a - 4 punten

De horizontale asymptoot is $y = 2$

$f(x) = 2 \Leftrightarrow (3-x)\mathrm{e}^{-0{,}05x^2} = 0 \Leftrightarrow 3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Vraag 2b - 3 punten

$f(x) = 2 + (3-x)\mathrm{e}^{-0{,}05x^2}$ geeft $f'(x) = [3-x]' \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x^2} + (3-x) \cdot \left[\mathrm{e}^{-0{,}05x^2}\right]'$

of $f(x) = 2 + 3 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x^2} - x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x^2}$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \left[\mathrm{e}^{-0{,}05x^2}\right]' - \mathrm{e}^{-0{,}05x^2} - x \cdot \left[\mathrm{e}^{-0{,}05x^2}\right]'$

Dit geeft $f'(x) = -\mathrm{e}^{-0{,}05x^2} + (3-x) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x^2} \cdot -0{,}1x$

of $f'(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x^2} \cdot -0{,}1x - \mathrm{e}^{-0{,}05x^2} \cdot -0{,}1x - x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05x^2} \cdot -0{,}1x$

Beide formules geven $f'(x) = (0{,}1x^2 - 0{,}3x - 1)\mathrm{e}^{-0{,}05x^2}$.

Vraag 2c - 4 punten

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}1x^2 - 0{,}3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 5$

$f(5) = 2 - 2\mathrm{e}^{-1{,}25}$ ($\approx 1{,}4270$), dus minimum in punt $(5, 2 - 2\mathrm{e}^{-1{,}25})$

$f(-2) = 2 + 5\mathrm{e}^{-0{,}2}$ ($\approx 6{,}0937$), dus maximum in punt $(-2, 2 + 5\mathrm{e}^{-0{,}2})$

Vraag 2d - 5 punten

Met richtingsvectoren:

$f'(0) = -1$, de richtingsvector van de raaklijn aan de grafiek van f is dus $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{7-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}} = \frac{6}{10}$, dus $\alpha = \cos^{-1}(0{,}6) \approx 53{,}13°$

Met richtingshoeken:

$f'(0) = -1$, de richtingshoek van de grafiek is dus $-45°$

De richtingscoëfficiënt van *k* is $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{7}$, de richtingshoek van *k* is dus $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) \approx 8{,}13°$

De hoek tussen k en de grafiek van f is dus $8{,}13° - (-45°) = 53{,}13°$

Met de verschilformule van de tangens:

De tangens van de raaklijn is $f'(0) = -1$

De tangens van lijn *k* is $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{7}$

$\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + (-\beta)) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(-\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(-\beta)} = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} = \dfrac{\frac{1}{7} + 1}{1 - \frac{1}{7}} = \dfrac{8}{6}$

De hoek tussen deze lijnen is dus $\tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) \approx 53{,}13°$

Vraag 3a – 7 punten

De cirkel heeft middelpunt $M(0{,}2)$ en straal 5

Met de gelijkvormigheid van de driehoeken MAB en MCD volgt:

$y = -1 \Rightarrow x^2 + 9 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$, dus *A* is punt $(-4, -1)$, *B* is punt $(4, -1)$ en $|AB| = 8$

Met *E* het midden van *AB* en *F* het midden van *CD* krijgen we: $|CD| : |AB| = |MF| : |ME| = 5:3$

Dit geeft $|CD| = \frac{5}{3} \cdot |AB| = \frac{5}{3} \cdot 8 = \frac{40}{3}$

De oppervlakte van driehoek *MCD* is zodoende $\frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |MF| = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{3} \cdot 5 = \frac{100}{3}$.

Met gelijkvormige rechthoekige driehoeken:

Als *E* het midden is van *AB* en *F* het midden van *CD*, dan zijn de driehoeken *MAE* en *MCF* gelijkvormig (net als *MBE* en *MDF*)

$|MC| : |MA| = |MF| : |ME| = 5:3 \quad (= |MD| : |MB|)$

Dit geeft $|MC| = \frac{5}{3} \cdot |MA| = \frac{5}{3} \cdot 5 = \frac{25}{3} \quad (= |MD|)$

Hieruit volgt $|CF| = \sqrt{|MC|^2 - |MF|^2} = \sqrt{\frac{625}{9} - 25} = \sqrt{\frac{400}{9}} = \frac{20}{3} \quad (= |DF|)$

De oppervlakte van driehoek *MCD* is zodoende $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |CF| \cdot |MF| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} \cdot 5 = \frac{100}{3}$

Dit is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |DF| \cdot |MF|$ *en aan* $\frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |MF| = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{3} \cdot 5$

Vraag 3a met lijnen MA en MB

De richtingscoëfficiënt van *MA* is $\frac{2-(-1)}{0-(-4)} = \frac{3}{4}$, dus de vergelijking van *MA* is $y = \frac{3}{4}x + 2$

De horizontale raaklijn is $y = 2 - 5 = -3$; dit geeft $-3 = \frac{3}{4}x_C + 2 \Leftrightarrow x_C = -\frac{20}{3}$

Hieruit volgt $x_D = \frac{20}{3}$, dus $CD = \frac{40}{3}$

De oppervlakte van driehoek *MCD* is zodoende $\frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot |MF| = \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{3} \cdot 5 = \frac{100}{3}$

Met F het midden van CD.

Vraag 3b - 5 punten

De raakpunten zijn de snijpunten van de lijn door *M* en *N* en de gegeven cirkel

$|MN| = \sqrt{(9-0)^2 + (14-2)^2} = 15$

De straal van de kleinste cirkel is $15 - 5 = 10$

De straal van de grootste cirkel is $15 + 5 = 20$

Alternatief:

De vergelijking voor de lijn door *M* en *N* is $y = \frac{4}{3}x + 2$

Dit invullen in de vergelijking van de gegeven cirkel geeft $x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 3$,

de raakpunten zijn dus (3 ,6) en $(-3, -2)$.

De afstand tussen *N* en het eerste raakpunt is $\sqrt{(9-3)^2 + (14-6)^2} = 10$

de afstand tussen *N* en het tweede raakpunt is $10 + 2 \cdot 5 = 20$

Dit is ook gelijk aan $\sqrt{(9+3)^2 + (14+2)^2}$

Vraag 4a - 6 punten

$f'(x) = -12\sin(x)\cos(x) - 6\cos(x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2} \vee \cos(x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = 1\frac{1}{2}\pi$

De eerste twee oplossingen zijn de maxima en die liggen op gelijke hoogte, dus de afstand is $\frac{2}{3}\pi$

Vraag 4b - 6 punten

$f(x) = -3\frac{1}{2} \Leftrightarrow 6(1 - \sin^2(x)) - 6\sin(x) - 5 = -3\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -6\sin^2(x) - 6\sin(x) + 4\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin^2(x) + \sin(x) - \frac{3}{4} = 0$

De substitutie $y = \sin(x)$ geeft dan $y^2 + y - \frac{3}{4} = 0$

Dit geeft $\sin(x) = y = \frac{-1+\sqrt{1+3}}{2} = \frac{1}{2} \vee \sin(x) = y = \frac{-1-\sqrt{1+3}}{2} = -\frac{3}{2}$

$\sin(x) = -\frac{3}{2}$ heeft geen oplossingen,
$\sin(x) = \frac{1}{2}$ heeft op het interval $0 \leq x \leq 2\pi$ de oplossingen $x = \frac{1}{6}\pi$ en $x = \frac{5}{6}\pi$

Vraag 4c - 2 punten

$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

dus $3\cos(2x) - 6\sin(x) - 2 = 3(2\cos^2(x) - 1) - 6\sin(x) - 2 = 6\cos^2(x) - 3 - 6\sin(x) - 2 = f(x)$

of $f(x) = 6\left(\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\right) - 6\sin(x) - 5 = 3\cos(2x) + 3 - 6\sin(x) - 5 = 3\cos(2x) - 6\sin(x) - 2$

Vraag 4d - 5 punten

$$\int_{\pi}^{2\pi} 3\cos(2x) - 6\sin(x) - 2 \ \mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\sin(2x) + 6\cos(x) - 2x\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 + 6 - 4\pi - (0 - 6 - 2\pi) = 12 - 2\pi$$

Vraag 5a - 4 punten

$g(x) = \ln(x^2) + \ln(4) = \ln(4x^2) \Rightarrow 3 - 4x = 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{1}{2}$

Alleen $x = \frac{1}{2}$ voldoet

Vraag 5b - 7 punten

$f(0) = \ln(3)$, dus te berekenen $\pi \cdot \int_0^{\ln(3)} x^2 \ \mathrm{d}y$

$y = \ln(3 - 4x) \Leftrightarrow 3 - 4x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow 4x = 3 - \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^y \Rightarrow x^2 = \frac{9}{16} - \frac{3}{8}\mathrm{e}^y + \frac{1}{16}(\mathrm{e}^y)^2$

$\pi \cdot \int_0^{\ln(3)} x^2 \ \mathrm{d}y = \pi \cdot \left[\frac{9}{16}y - \frac{3}{8}\mathrm{e}^y + \frac{1}{32}\mathrm{e}^{2y}\right]_0^{\ln(3)} = \pi \cdot \left(\frac{9}{16}\ln(3) - \frac{3}{8} \cdot 3 + \frac{1}{32} \cdot 9 - \left(0 - \frac{3}{8} + \frac{1}{32}\right)\right)$

$= \pi \cdot \left(\frac{9}{16}\ln(3) + \frac{-36+9+12-1}{32}\right) = \pi \cdot \left(\frac{9}{16}\ln(3) - \frac{1}{2}\right)$