

# CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

## Uitwerkingen Wiskunde B 19 april 2019

1a  $y(t) = x(t) + 7 \Leftrightarrow -t^2 + 4 = t^2 - 2t - 3 + 7$

Dit geeft  $2t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow 2t(t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1$

$t = 0$  geeft  $x = -3$  en  $y = 4$ , dus het eerste snijpunt is  $(-3, 4)$ .

$t = 1$  geeft  $x = -4$  en  $y = 3$ , dus het tweede snijpunt is  $(-4, 3)$

De afstand is  $\sqrt{(-4 - (-3))^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

1b  $y(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -2$

$t = -2$  geeft  $x = 5$ ;  $t = 2$  geeft  $x = -3$ , dus  $A$  is het punt  $(5, 0)$ .

$x'(t) = 2t - 2$ , dus  $x'(-2) = -6$ ;  $y'(t) = -2t$ , dus  $y'(-2) = 4$

De vectorvoorstelling van de raaklijn is  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

1c  $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(2t - 2)^2 + (-2t)^2}$

$$= \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 4t^2} = \sqrt{8t^2 - 8t + 4}$$

$$v'(t) = \frac{16t - 8}{2\sqrt{8t^2 - 8t + 4}}$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$v\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{8 \cdot \frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{1}{2} + 4} = \sqrt{2}$$

2a Met  $C(x, 0)$  krijgen we  $|AC| = \sqrt{(x - 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

en  $|BC| = \sqrt{(x - 3)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 64} = \sqrt{x^2 - 6x + 73}$

$$|AC| = |BC| \Leftrightarrow -2x + 5 = -6x + 73 \Leftrightarrow 4x = 68 \Leftrightarrow x = 17$$

### 2a Alternatief 1

$C$  is het snijpunt van de middelloodlijn van  $AB$  en de  $x$ -as.

Deze middelloodlijn gaat door het punt  $\left(\frac{3+1}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (2, 5)$ .

De richtingscoëfficiënt van  $AB$  is  $\frac{8-2}{3-1} = 3$ , dus de richtingscoëfficiënt van de

middelloodlijn is  $-\frac{1}{3}$ . De vergelijking van de middelloodlijn is dus  $y - 5 = -\frac{1}{3}(x - 2)$ .

$y = 0$  geeft dan  $-5 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow x - 2 = 15 \Leftrightarrow x = 17$

### 2a Alternatief 2

De richtingsvector van  $AB$  is  $\begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ . De richtingsvector van de middelloodlijn van

$AB$  is een normaalvector hiervan, bijvoorbeeld  $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ . Het midden van  $AB$  is  $(2, 5)$ .

Een vectorvoorstelling voor de middelloodlijn is dus  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

$y = 0$  geeft dan  $0 = 5 - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{2}$  en  $x = 2 + 6\lambda = 2 + 15 = 17$

2b De lijn  $y = ax$  raakt de cirkel in  $O(0,0)$  als dit het enige gemeenschappelijke punt van de lijn en de cirkel is.

Substitutie van  $y = ax$  in  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$  geeft

$$x^2 + a^2x^2 - 2x - 4ax = 0 \Leftrightarrow (1 + a^2)x^2 + (-2 - 4a)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x((1 + a^2)x - 2 - 4a) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2 + 4a}{1 + a^2}$$

Er is één oplossing als  $2 + 4a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

$$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -26,6^\circ, \text{ dus de hoek is } 26,6^\circ.$$

2b *Alternatief 1*

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 5 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

Het middelpunt van  $c_2$  is dus  $M(1,2)$ .

De richtingscoëfficiënt van de straal  $OM$  is zodoende  $\frac{2-0}{1-0} = 2$

Voor de richtingscoëfficiënt  $r$  van de raaklijn geldt dan  $2r = -1 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$

$$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -26,6^\circ, \text{ dus de hoek is } 26,6^\circ.$$

2b *Alternatief 2*

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 5 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

Het middelpunt van  $c_2$  is dus  $M(1,2)$  en  $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

De richtingsvector van de raaklijn is een normaalvector van  $\overrightarrow{OM}$ , bijvoorbeeld  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is zodoende  $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\tan^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -26,6^\circ, \text{ dus de hoek is } 26,6^\circ.$$

2c Het inproduct van  $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$  en  $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$  is  $-6 \cdot 6 + 4 \cdot 9 = 0$

2d Driehoek  $ODE$  heeft een rechte hoek bij  $O$ . De omgekeerde stelling van Thales zegt dan dat het middelpunt van de cirkel door  $O$ ,  $D$  en  $E$  het midden van de schuine zijde  $DE$  is.

Dit is het punt met  $x = \frac{-6+6}{2} = 0$  en  $y = \frac{4+9}{2} = 6\frac{1}{2}$ .

2d *Alternatief*

Substitueer de coördinaten van  $O$ ,  $D$  en  $E$  in de formule  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$$\text{Dit geeft } \begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 \\ (-6 - a)^2 + (4 - b)^2 = r^2 \\ (6 - a)^2 + (9 - b)^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = r^2 \\ 36 + 12a + 16 - 8b = 0 \\ 36 - 12a + 81 - 18b = 0 \end{cases}$$

De oplossingen zijn  $a = 0$  en  $b = r = 6\frac{1}{2}$ .

Het middelpunt van de cirkel is dus het punt  $(a, b) = \left(0, 6\frac{1}{2}\right)$ .

- 3a In een perforatie geldt  $teller = 0$  en  $noemer = 0$   
 $noemer = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$   
 Substitutie van  $x = 2$  in  $teller = 0$  geeft  
 $3 \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 2a = 0 \Leftrightarrow 12 + 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = -12 \Leftrightarrow a = -6$   
 Substitutie van  $x = -2$  in  $teller = 0$  geeft  
 $3 \cdot -8 - 3 \cdot 4 - 2a = 0 \Leftrightarrow -36 - 2a = 0 \Leftrightarrow 2a = -36 \Leftrightarrow a = -18$

- 3b Er moet gelden  $f_0(1) = g(1) = 0$  en  $f'_0(1) = g'(1)$ .  
 Invullen van  $x = 1$  in  $f_0(x) = \frac{3x^3 - 3x^2}{x^2 - 4}$  en in  $g(x) = (1 - x)e^{1-x}$   
 geeft inderdaad  $f_0(1) = g(1) = 0$ .  

$$f'_0(x) = \frac{(9x^2 - 6x)(x^2 - 4) - (3x^3 - 3x^2) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'_0(1) = \frac{(9 - 6)(1 - 4) - (3 - 3) \cdot 2}{(-3)^2} = \frac{3 \cdot -3 - 0}{9} = \frac{-9}{9} = -1$$

$$g'(x) = -1 \cdot e^{1-x} + (1 - x)e^{1-x} \cdot -1 = -e^{1-x} - (1 - x)e^{1-x}$$

$$g'(1) = -e^{1-1} - (1 - 1)e^{1-1} = -1$$

- 3c 
$$f_0(x) = \frac{3x^3 - 3x^2}{x^2 - 4} = \frac{3x^3 - 12x - 3x^2 + 12x}{x^2 - 4} = \frac{3x^3 - 12x}{x^2 - 4} + \frac{-3x^2 + 12x}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{3x(x^2 - 4)}{x^2 - 4} + \frac{-3 + \frac{12}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 3x + \frac{-3 + \frac{12}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$
 Dit geeft  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f_0(x) - (3x - 3)) = 0$ .  
 De scheve asymptoot is dus  $y = 3x - 3$

3c *Alternatief*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'_0(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^4 - 36x^2}{x^4 - 8x^2 + 16} = 3$$

De scheve asymptoot heeft dus de vorm  $y = 3x + b$ .  
 Uitwerken van  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f_0(x) - (3x + b)) = 0$  geeft  $b = -3$ , want

$$\frac{3x^3 - 3x^2}{x^2 - 4} - (3x + b) = \frac{3x^3 - 3x^2}{x^2 - 4} - \frac{(3x + b)(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{(-3 - b)x^2 + 4b}{x^2 - 4}$$

4a  $g(p) - f(p) = 2 \Leftrightarrow {}^2\log\left(\frac{16}{3-p}\right) - {}^2\log(p+2) = 2 \Leftrightarrow {}^2\log\left(\frac{16}{(3-p)(p+2)}\right) = 2$   
 Dit geeft  $\frac{16}{(3-p)(p+2)} = 2^2 \Leftrightarrow \frac{16}{2^2} = (3-p)(2+p) \Leftrightarrow 4 = 6 + p - p^2$   
 $\Leftrightarrow p^2 - p - 2 = 0 \Leftrightarrow (p-2)(p+1) = 0 \Leftrightarrow p = 2 \vee p = -1$

De vergelijking kan ook worden omgewerkt tot  ${}^2\log\left(\frac{16}{3-p}\right) = {}^2\log(4(p+2))$  of tot  ${}^2\log((3-x)(p+2)) = 2$  met uiteindelijk dezelfde tweedegraads vergelijking.

4b De afstand is minimaal als  $g'(p) - f'(p) = 0 \Leftrightarrow g'(p) = f'(p)$

$$g'(p) = \frac{3-p}{16} \cdot \frac{16}{(3-p)^2} \cdot \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{3-p} \cdot \frac{1}{\ln(2)}$$

Kan ook met  $g(p) = {}^2\log(16) - {}^2\log(3-x)$

$$f'(p) = \frac{1}{p+2} \cdot \frac{1}{\ln(2)}$$

$$g'(p) = f'(p) \Leftrightarrow 3-p = p+2 \Leftrightarrow -2p = -1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

4c  $h(x) = \frac{{}^2\log((x+2)^2)}{{}^2\log(4)} = \frac{2 \cdot {}^2\log(x+2)}{2} = {}^2\log(x+2)$

$$\text{of: } f(x) = \frac{{}^4\log(x+2)}{{}^4\log(2)} = \frac{{}^4\log(x+2)}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot {}^4\log(x+2) = {}^4\log((x+2)^2) = h(x)$$

Dit geldt voor alle  $x$  in het domein van  $f$ , dus alleen als  $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

5a Er moet gelden  $f_a(1) = g_a(1) = 1$  en  $f'_a(1) \cdot g'_a(1) = -1$ .

$$f_a(1) = \exp\left(\frac{1-1}{a}\right) = \exp\left(\frac{0}{a}\right) = e^0 = 1; \quad g_a(1) = \exp(1-1^a) = \exp(1-1) = e^0 = 1$$

$$f'_a(x) = \exp\left(\frac{x-1}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow f'_a(1) = 1 \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$g'_a(x) = \exp(1-x^a) \cdot -a \cdot x^{a-1} \Rightarrow g'_a(1) = 1 \cdot -a \cdot 1 = -a$$

Dit geeft  $f'_a(1) \cdot g'_a(1) = \frac{1}{a} \cdot -a = -1$

5b  $Inhoud S_p = \pi \int_1^p (f_4(x))^2 dx = \pi \int_1^p \left(\exp\left(\frac{x-1}{4}\right)\right)^2 dx = \pi \int_1^p \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) dx$

[ want  $(\exp(X))^2 = (e^X)^2 = e^{2X} = \exp(2X)$  ]

$$\dots = \pi \cdot \left[ 2 \exp\left(\frac{x-1}{2}\right) \right]_1^p = \pi \cdot \left( 2 \exp\left(\frac{p-1}{2}\right) - 2 \exp(0) \right) = 2\pi \cdot \left( \exp\left(\frac{p-1}{2}\right) - 1 \right)$$

Dit moet gelijk zijn aan  $2\pi$  dus volgt

$$\exp\left(\frac{p-1}{2}\right) - 1 = 1 \Leftrightarrow \exp\left(\frac{p-1}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{p-1}{2} = \ln(2) \Leftrightarrow p = 1 + 2 \ln(2)$$

6a  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + y - 1 = 0$  met  $y = \cos(x)$

Dit geeft  $y = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$  of  $y = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 - 3}{4} = -1$

Oplossingen op het interval  $0 \leq x \leq 2\pi$ :

$\cos(x) = \frac{1}{2}$  voor  $x = \frac{1}{3}\pi$  en  $x = 1\frac{2}{3}\pi$

$\cos(x) = -1$  voor  $x = \pi$

6b  $G'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \cos(2x) \cdot 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (2 \cos^2(x) - 1) = \frac{1}{2} + \cos^2(x) - \frac{1}{2}$

6b *Alternatief 1*

$G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot 2 \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin(x) \cos(x)$  geeft

$G'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2(x) - \frac{1}{2} \sin^2(x) = \frac{1}{2} (\cos^2(x) + \sin^2(x)) + \frac{1}{2} \cos^2(x) - \frac{1}{2} \sin^2(x)$

6b *Alternatief 2*

$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1$  geeft  $g(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$

$G(x)$  is inderdaad een primitieve hiervan.

6c  $f(x) = 2g(x) + \cos(x) - 1$

Een primitieve is dus

$2G(x) + \sin(x) - x = 2 \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin(2x) \right) + \sin(x) - x = \frac{1}{2} \sin(2x) + \sin(x)$

Dit geeft  $\int_0^{\pi} f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} \sin(2x) + \sin(x) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 0 + 1 - 0 - 0 = 1$

6d  $h(x) = k(x) \Leftrightarrow 5x = \frac{1}{4}\pi - 5x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 10x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{40}\pi + k \cdot \frac{1}{5}\pi$

De periode van de oplossingen is dus  $\frac{1}{5}\pi$ .

Dat betekent dat er 5 oplossingen zijn op het interval  $0 \leq x \leq \pi$

Dit zijn  $\frac{1}{40}\pi$ ;  $\frac{9}{40}\pi$ ;  $\frac{17}{40}\pi$ ;  $\frac{25}{40}\pi$  en  $\frac{33}{40}\pi$

*Opsommen van de oplossingen zonder deze te tellen, telt als een fout!*

*Opm.* In 6a en 6c kun je ook eerst de formule van  $f(x)$  omwerken met

$\cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$

Dit geeft  $f(x) = \cos(2x) + \cos(x)$