

CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Voorbeeldtentamen Wiskunde B

Datum: Najaar 2018

Tijd: 3 uur

Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.

Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek zijn NIET toegestaan.**

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:						
Opgave	1	2	3	4	5	6
a	4	4	5	4	5	5
b	6	7	5	5	6	5
c		5	5	5	7	
d		7				
Totaal	10	23	15	14	18	10
Cijfer = $\frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$						
U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.						

Opgave 1

Bron: Centraal Examen vwo 2018 tijdvak 2

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{-2 + 2\sqrt{x+1}}{x}$.

Ook is gegeven de functie h door $h(x) = \frac{2}{1 + \sqrt{x+1}}$.

Voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$

4pt a Bewijs dat voor $x \neq 0$ geldt: $f(x) = h(x)$.

Verder is de functie g gegeven door $g(x) = \frac{4x^2 + x}{x}$.

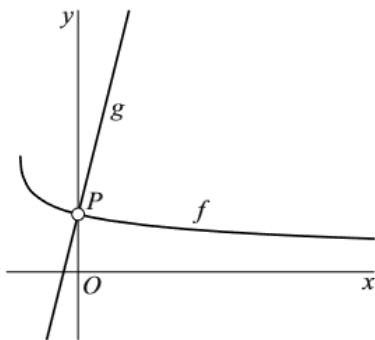
Er is een lijn k die voor $x \neq 0$ samenvalt met de grafiek van g .

In figuur 1 zijn de grafieken van f en g weergegeven.

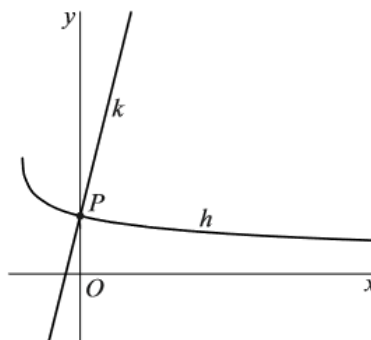
Punt $P(0, 1)$ is de perforatie van beide grafieken.

In figuur 2 zijn de grafiek van h en lijn k weergegeven en ook hun snijpunt P .

figuur 1



figuur 2



Er geldt:

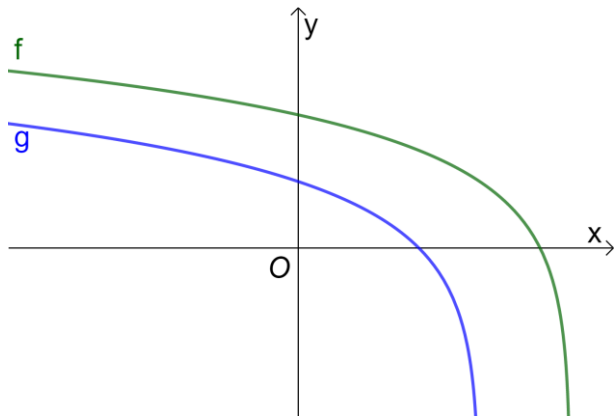
de grafieken van f en g staan in hun perforatie P loodrecht op elkaar als de grafiek van h en lijn k in hun snijpunt P loodrecht op elkaar staan.

6pt b Bewijs dat de grafieken van f en g loodrecht op elkaar staan in hun perforatie P .

Opgave 2

Bron: CCVX voortentamen wiskunde B juli 2018

In de figuur hieronder ziet u de grafieken van de functies $f(x) = \ln(9 - 2x)$ en $g(x) = \ln(3 - x)$.



De verticale lijn $x = p$ snijdt de grafiek van f in punt P en de grafiek van g in punt Q . De afstand tussen punt P en punt Q is gelijk aan $\ln(4)$.

4pt a Bepaal de waarde van p met een exacte berekening.

De grafiek van f snijdt de y -as in punt R . De grafiek van g snijdt de y -as in punt S . De raaklijn aan de grafiek van f in punt R en de raaklijn aan de grafiek van g in punt S snijden elkaar in punt T .

7pt b Bereken de x -coördinaat van punt T exact en vereenvoudig uw antwoord.

Verder wordt de functie h gegeven door $h(x) = 2 \cdot \ln(x + 3)$.

5pt c Bereken de coördinaten van het (de) snijpunt(en) van de grafieken van f en h exact.

V is het begrensde vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van g , de x -as en de y -as.

7pt d Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door V te wentelen rond de y -as.

Opgave 3

Bron: Centraal Examen vwo 2018 tijdvak 2

Gegeven is het vierkant $ABCD$ met hoekpunten $A(8,0)$, $B(0,4)$, $C(-4,-4)$ en $D(4,-8)$.

Op zijde AB ligt het punt $P(2,3)$.

Zie figuur 1.

De punten B , C en P liggen op één cirkel.

6pt a Stel een vergelijking op van deze cirkel.

Over lijnstuk DP beweegt (van D naar P) een punt Q .

Er is een positie van punt Q waarvoor lijnstuk CQ loodrecht staat op lijnstuk DP . Zie figuur 2.

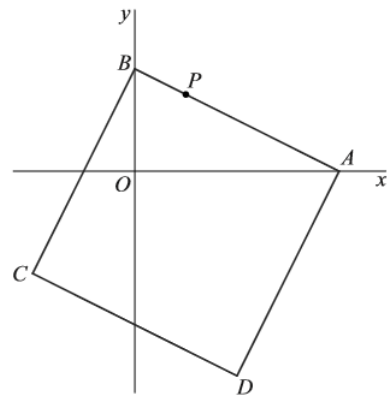
6pt b Bereken voor deze positie exact de

coördinaten van Q .

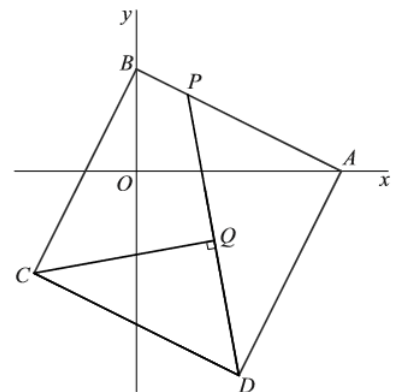
In figuur 3 is driehoek CDQ grijs gemaakt. Er is een positie van Q waarbij de oppervlakte van driehoek CDQ een derde deel is van de oppervlakte van vierkant $ABCD$.

6pt c Bereken voor deze positie exact de coördinaten van Q .

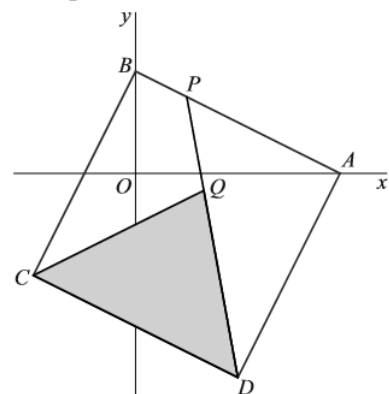
figuur 1



figuur 2



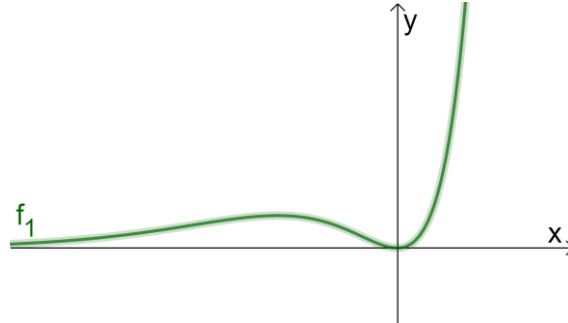
figuur 3



Opgave 4

Bron: CCVX voortentamen wiskunde B juli 2018 (aangepast)

Voor iedere $a \neq 0$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x^2 \cdot e^{ax}$.
In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie f_1 .



Zoals u kunt zien, heeft de grafiek van f_1 twee buigpunten.

5pt a Bereken de x -coördinaten van deze buigpunten exact.

Net zoals f_1 hebben alle functies f_a een minimum in $(0,0)$. Deze functies hebben ook een maximum. Het punt op de grafiek waar f_a een maximum heeft noemen we P_a . De punten P_a liggen alle op dezelfde parabool.

6pt b Stel met een exacte berekening een vergelijking op voor deze parabool.

De grafiek van f_2 heeft twee raaklijnen met een vergelijking van de vorm $y = px$. Deze raaklijnen gaan dus door de oorsprong $(0,0)$.

7pt c Stel met een exacte berekening vergelijkingen op voor deze twee raaklijnen.

Opgave 5

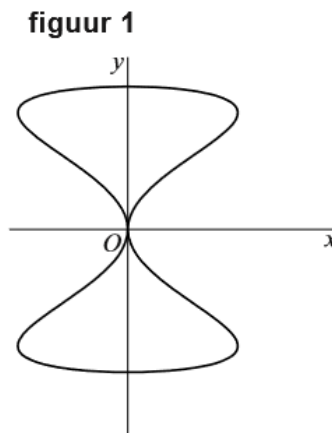
Bron: Centraal Examen vwo 2018 tijdvak 2

Een punt beweegt voor $0 \leq t \leq 2\pi$ volgens de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \sin(2t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases}$$

De baan van het bewegende punt is weergegeven in figuur 1.

Voor $t = \frac{1}{2}\pi$ en $t = 1\frac{1}{2}\pi$ bevindt het bewegende punt zich in O . Deze situatie laten we in de gehele opgave verder buiten beschouwing.



P_t is de positie van het bewegende punt op tijdstip t .

Er geldt: de lijn door P_a en $P_{\pi-a}$ is voor elke in deze situatie mogelijke waarde van a verticaal.

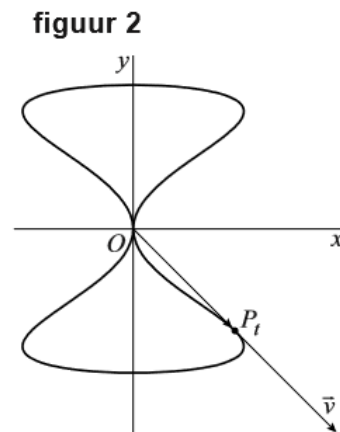
4pt a Bewijs dat die lijn inderdaad verticaal is.

Er zijn meerdere tijdstippen waarvoor geldt dat de afstand van P_t tot de x -as twee keer zo groot is als de afstand van P_t tot de y -as.

5pt b Bereken exact het vierde tijdstip waarvoor dit het geval is.

Voor iedere waarde van t kunnen de snelheidsvector \vec{v} vanuit punt P_t en de vector $\overrightarrow{OP_t}$ worden getekend.

In figuur 2 zijn punt P_t , vector $\overrightarrow{OP_t}$ en vector \vec{v} getekend voor $t = \frac{3}{4}\pi$.



5pt c Bewijs dat voor $t = \frac{3}{4}\pi$ geldt: $\overrightarrow{OP_t} = \vec{v}$

Opgave 6

Nieuw

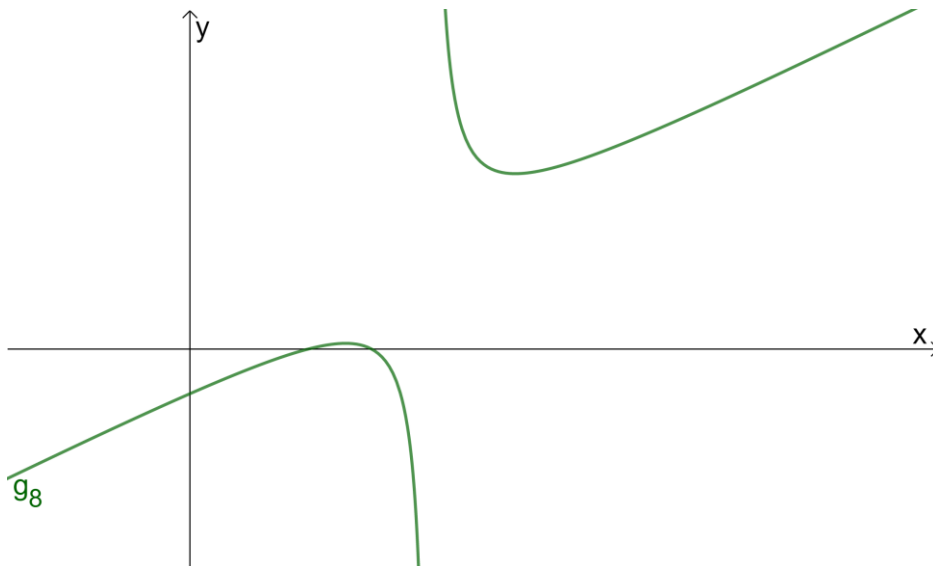
De familie functies g_p wordt gegeven door

$$g_p(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - p}$$

Voor $p \neq 4$ snijdt de grafiek van de functie g_p de parabool met vergelijking $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ in het punt $(2,0)$.

- 5pt a Bepaal met een exacte berekening de waarde(n) van p waarvoor geldt dat deze parabool en de grafiek van g_p elkaar raken in het punt $(2,0)$.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie g_8 . Deze grafiek heeft twee asymptoten.



- 5pt b Bepaal met een exacte berekening vergelijkingen van de twee asymptoten van de grafiek van g_8 .

Extra vraag: Hoe zien de grafieken van g_4 en g_6 er uit?

Einde van het tentamen.

Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

Formulelijst wiskunde B

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

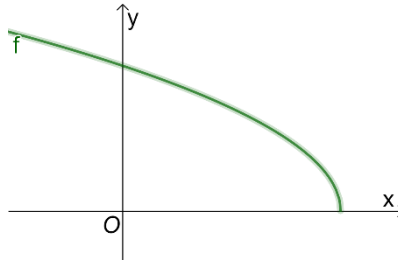
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$

Meer oefenopgaven

Uit het Centraal Examen vwo Wiskunde B 2018, tijdvak 2 sluiten de vragen 6, 7, 11, 15 en 16 ook goed aan bij het voortentamen wiskunde B van de CCVX. Je kunt dit examen vinden op www.examenblad.nl. Verder zijn onderstaande opgaven uit het voortentamen wiskunde B van juli 2018 nog actueel.

Extra opgave 1

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{9 - 2x}$.



ℓ is de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt met de y -as.

D is de driehoek die wordt ingesloten door lijn ℓ , de x -as en de y -as.

6pt a Bereken de oppervlakte van driehoek D exact.

V is het begrensde vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de x -as en de y -as.

6pt b Bereken de oppervlakte van vlakdeel V exact.

Verder wordt de functie g gegeven door $g(x) = 2x + 11$.

5pt c Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ exact op.

Extra opgave 2

De functies f en g worden gegeven door $f(x) = \sin^2(x) + \cos(2x)$ en

$$g(x) = \sin^2(x) + \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right).$$

7pt a Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ exact op en geef alle oplossingen op het interval $[-\pi, \pi]$.

7pt b Bereken met behulp van de afgeleide functie exact de minimale en de maximale waarde van $f(x)$.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = f(x) + g(x) + 2 \cos^2(x) - 2$,

4pt c Toon aan dat h geschreven kan worden als $h(x) = \sin\left(2x + \frac{1}{6}\pi\right)$.

4pt d Bereken exact:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) \, dx$$