CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 22 juli 2019
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.
Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	4	5	4	3	3	5
b	5	5	4	4	4	4
c	5	5	4	5	3	
d	5		5	4	4	
Totaal	19	15	17	16	14	9

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche berekeningen

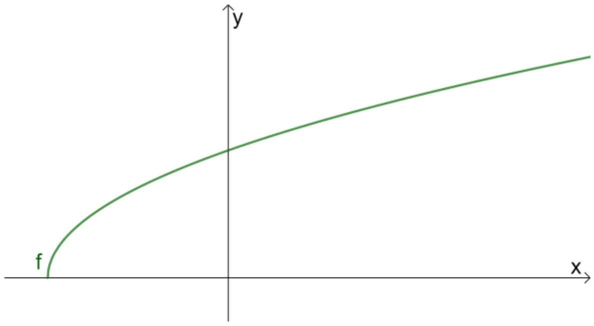
*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

4pt a Los de vergelijking $16x^3 + 9x = 24x^2$ algebraïsch op.

Gegeven worden lijn *k* met vergelijking $x - 4y = 2$ en lijn l met vergelijking $y = 2x + 7$. Lijn m is evenwijdig aan lijn *k* en gaat door de oorsprong $O(0,0)$.

5pt b Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van lijn l en lijn m.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{2x+8}$.



A is het punt op de grafiek van f waar de helling van de grafiek gelijk is aan $\frac{1}{4}$.

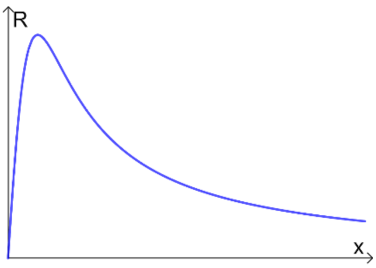
5pt c Gebruik de afgeleide functie van f om de coördinaten van punt *A* te berekenen.

5pt d Bereken algebraïsch de coördinaten van het (de) snijpunt(en) van de grafiek van f en de rechte lijn $y = -2x + 4$.

Opgave 2 – Hemelwater

Karen heeft een boerderij in Afrika. De opbrengst van een zeker gewas hangt af van de regenval in het groeiseizoen, dat in de maanden november en december valt. Als er te weinig of te veel regen valt, zal de opbrengst lager zijn. De opbrengst van dit gewas in tonnen als functie van de hoeveelheid regenval wordt gegeven door de formule

$$R(x) = \frac{7500\,x}{x^2 + 2500}$$



In deze formule is $R(x)$ de opbrengst van het gewas in tonnen en is x de hoeveelheid regenval in november en december uitgedrukt in mm (1 mm regenval = 1 liter per m^2).

De grafiek van deze functie ziet u in de figuur hiernaast.

Om winst te maken, moet de opbrengst van het gewas meer dan 60 ton zijn.

5pt **a** Bereken algebraïsch de hoeveelheid regenval waarbij de opbrengst van het gewas meer dan 60 ton is.

5pt **b** Bereken algebraïsch de hoeveelheid regenval waarbij de opbrengst van het gewas maximaal is.

Denys heeft ook een boerderij in Afrika. De opbrengst van zijn gewas als functie van de hoeveelheid regenval wordt gegeven door

$$R(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}02x}$$

($R(x)$ in tonnen, x in mm regenval in het groeiseizoen).

Omdat er een rivier in de buurt is die voldoende water levert, kan Denys de regenval kunstmatig verhogen door te sproeien.

5pt **c** Gebruik de afgeleide van de opbrengstfunctie om te bepalen of het een goed idee is om de regenval kunstmatig te vergroten als de natuurlijke hoeveelheid regenval in het groeiseizoen 75 mm is.

Opgave 3 – Rad van Fortuin

Om in het rustige zomerseizoen klanten te trekken, geven de winkeliers in een winkelcentrum vouchers aan hun klanten. Als je zo'n voucher inlevert, kun je een draai aan het rad van fortuin op de foto hiernaast geven. Daarmee kun je waardebonnen winnen waarmee je korting krijgt op de prijs van je volgende aankoop in het winkelcentrum. We nemen voorlopig aan dat alle 30 uitkomsten op het rad van fortuin even waarschijnlijk zijn.

Als de uitkomst een klinker is (A, E, I, O, U), win je een waardebon van 10 euro en als de uitkomst één van de 21 medeklinkers is (de Y is ook een medeklinker!), win je een waardebon van 5 euro.

Als de uitkomst één van de vier jokers is, moet je nog een draai aan het rad geven. Als de uitkomst van de tweede draai weer een joker is, win je een waardebon van 100 euro, anders win je een waardebon van 5 euro, ongeacht het soort letter van de uitkomst.
De waarde van de waardebon die je zo kunt winnen, is een toevalsvariabele X.

4pt **a** Toon aan dat $P(X=5)=\frac{734}{900}$ en $P(X=100)=\frac{16}{900}$.

De toevalsvariabele X heeft verwachtingswaarde $E(X)=7{,}5222$ en standaard-afwijking $\sigma(X)=12{,}5797$.

4pt **b** Controleer met een duidelijke berekening dat $E(X)=7{,}5222$.

Op een zekere dag wordt dit spel 676 keer gespeeld. De totale waarde van de waardebonnen die gewonnen worden is een toevalsvariabele Y.

4pt **c** Bereken $E(Y)$ en $\sigma(Y)$.

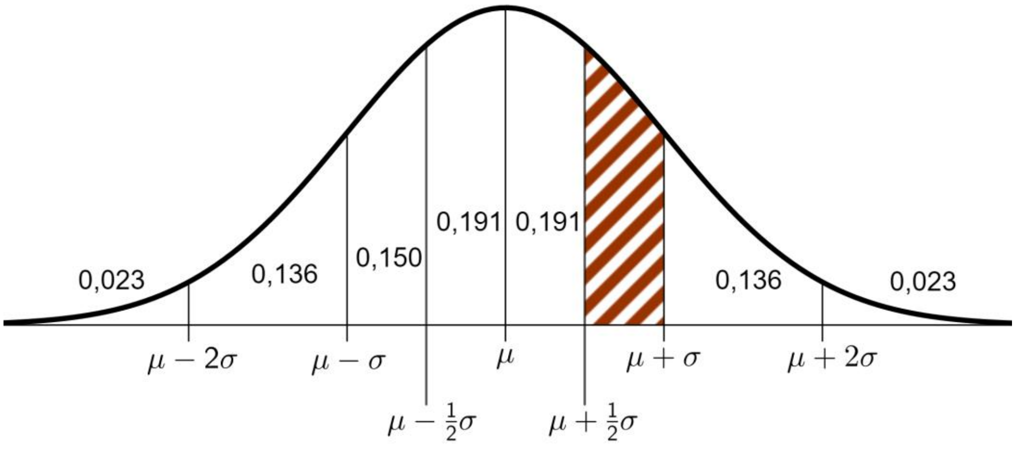
Na enige tijd vermoeden de eigenaren van het winkelcentrum dat de kans dat de uitkomst van een draai met het rad van fortuin een joker is, groter is dan op grond van de bovenstaande beschrijving verwacht kan worden. Om dit te toetsen worden de uitkomsten van 100 keer draaien met het rad genoteerd.

5pt **d** Stel een toetsingsprocedure op voor deze situatie door de volgende vragen te beantwoorden:
- Welke toetsingsgrootheid zou u gebruiken?
- Wat voor kansverdeling heeft deze toetsingsgrootheid en wat zijn de parameters hiervan?
- Wat is de nulhypothese en wat is de alternatieve hypothese?
- Welke informatie hebt u nog meer nodig om deze toetsingsprocedure uit te voeren?

Opgave 4 – Patat of aardappelpuree

Boer Fred verbouwt aardappelen voor een fabriek die patat en aardappelpuree-poeder produceert. Aardappelen met een gewicht van meer dan 85 gram kunnen worden gebruikt om patat van te maken, aardappelen die minder wegen kunnen alleen gebruikt worden voor aardappelpureepoeder. Daarom betaalt de fabriek 9 cent voor iedere aardappel die meer dan 85 gram weegt en betaalt de fabriek slechts 6 cent voor iedere aardappel die minder dan 85 gram weegt.
Het gewicht van de aardappelen uit de oogst van dit jaar is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 83$ gram en een standaardafwijking van $\sigma = 4$ gram.

3pt **a** Gebruik de figuur hieronder om aan te tonen dat de kans dat een aardappel uit deze oogst meer dan 85 gram weegt, gelijk is aan 0,309.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$.

Fred heeft dit jaar 850 000 aardappelen geoogst.

4pt **b** Bereken de verwachte totale prijs waarvoor Fred deze aardappelen aan de fabriek zal verkopen.

Bij een kwaliteitscontrole worden 50 aardappelen onderzocht die willekeurig gekozen zijn uit deze oogst.

5pt **c** Bereken de kans dat precies 15 van deze 50 aardappelen een gewicht van meer dan 85 gram hebben.

Boer Barney verbouwt ook aardappelen voor deze fabriek. Het gewicht van de aardappelen in zijn oogst is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 82$ gram en een standaardafwijking van $\sigma = 7$ gram. Barney heeft, net als Fred, 850 000 aardappelen geoogst.

4pt **d** Is de verwachte totale prijs van Barney's oogst hoger of lager dan de verwachte totale prijs van Freds oogst? Motiveer uw antwoord!

Opgave 5 – Met rente terugbetalen

Bert heeft een mooi huis gekocht in Midden Nederland. Om dit huis te financieren, heeft hij een hypotheek en een overbruggingskrediet afgesloten. De beginwaarde van de hypotheek is 126 000 euro. De rente is 2,4% per jaar en hij lost deze hypotheek af in 30 jaar, in maandelijkse termijnen van $126\,000/(30 \times 12) = 350$ euro. Deze termijnen moeten op de eerste dag van iedere maand betaald worden, samen met de rente van 0,2% van de resterende hypotheekschuld in de vorige maand. De transactiedatum van de koop van het huis is 1 juli 2019, dus de eerste betaling moet op 1 augustus 2019 plaatsvinden.

3pt **a** Neem de tabel hieronder over op uw antwoordblad en vul de zes ontbrekende getallen in.

Maand	Restschuld in euro	Te betalen rente in euro
juli 2019	126 000	--
augustus 2019	125 650	252
september 2019	125 300	
oktober 2019		
november 2019		
juni 2049	350	
juli 2049	0	0,70

4pt **b** Bereken algebraïsch het totale bedrag dat Bert aan rente moet betalen in deze 30 jaar.

Bert heeft zijn oude huis nog niet verkocht, dus heeft hij ook een overbruggingslening nodig van 100 000 euro. Tijdens de overbruggingsperiode betaalt hij geen rente en ook geen aflossing voor deze lening. Het volledige bedrag van de lening en de rente zal betaald worden op de transactiedatum van de verkoop van zijn oude huis. Dit bedrag hangt af van de duur van de overbruggingsperiode en wordt gegeven door de formule

$$B(t) = 100\,000 \cdot \mathrm{e}^{0{,}00015t}$$

In deze formule is $B(t)$ het totale te betalen bedrag in euro en is t de tijd in dagen, met $t = 0$ op 1 juli 2019.
Aangezien de meeste klanten geen wiskundigen zijn, kan de bank die de overbruggingslening verstrekt deze formule niet publiceren. In plaats daarvan publiceert de bank de zogenaamde effectieve rente op jaarbasis, dat is de rente als percentage van het geleende bedrag die een klant zou moeten betalen als hij de lening na precies één jaar zou aflossen (1 jaar = 365 dagen, de schrikkeldag wordt verwaarloosd).

3pt **c** Bereken algebraïsch de effectieve rente op jaarbasis voor Berts overbruggingslening.

Lees verder op de volgende pagina.

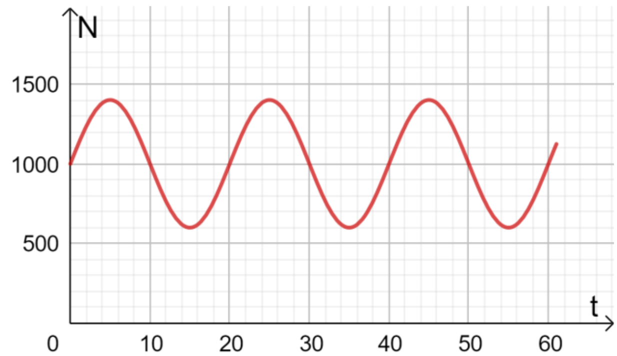
Vervolg opgave 5

Na een tijdje heeft Bert zijn oude huis verkocht. Het totale bedrag dat hij moet betalen voor zijn overbruggingslening blijkt 101 496 euro te zijn.

4pt d Hoeveel dagen heeft Bert zijn overbruggingslening nodig gehad?

Opgave 6 – Veldmuizen

Het aantal veldmuizen in een weide varieert door de prooi-roofdier cyclus. Als er weinig muizen zijn, zijn er ook weinig roofdieren, dus zal de muizenpopulatie groeien. Dit trekt meer roofdieren aan, wat op den duur zal leiden tot een even laag aantal muizen, dus vertrekken de roofdieren en kan de muizenpopulatie weer groeien, enzovoorts, enzovoorts.
Voor een zekere weide wordt dit verschijnsel voor de maanden juli en augustus gemodelleerd door de grafiek in onderstaande figuur



Bij deze grafiek past een functievoorschrift van de vorm $N(t) = A + B\sin(Ct)$.
In deze formule is $N(t)$ het aantal veldmuizen in de weide en is t de tijd in dagen, met $t = 0$ op 1 juli.

5pt a Bepaal waarden voor A, B en C die overeenkomen met de informatie die de grafiek geeft.

Op 22 juli, dat is als $t = 21$, zijn er 1124 veldmuizen in de weide.

4pt b Bereken de eerste twee datums na 22 juli waarop er 1124 veldmuizen in de weide zullen zijn.

Einde van het tentamen.

Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$

Antwoorden

1a $x = 0 \vee x = \frac{3}{4}$

1b $x = -4;\ y = -1$

1c $x = 4;\ y = 4$

1d $x = \frac{1}{2};\ y = 3$

2a $25 < x < 100$

2b $x = 50$

2c $R'(75) = -\mathrm{e}^{-1,5} < 0$
Extra beregening leidt dus tot een afname van de opbrengst, dus dat is geen goed idee

3a $P(X = 100) = \frac{4}{30} \cdot \frac{4}{30} = \frac{16}{900}$;
$P(X = 5) = \frac{21}{30} + \frac{4}{30} \cdot \frac{26}{30} = \frac{734}{900}$ of $P(X = 5) = 1 - \left(P(X = 100) + P(X = 10)\right) = \frac{734}{900}$

3b $E(X) = 5 \cdot P(X = 5) + 10 \cdot P(X = 10) + 100 \cdot P(X = 100) = 5 \cdot \frac{734}{900} + 10 \cdot \frac{5}{30} + 100 \cdot \frac{16}{900}$

3c $E(Y) = 676 \cdot E(X) = 676 \cdot 7{,}5222 = 5085{,}0;\ \sigma(Y) = \sqrt{676} \cdot \sigma(X) = 26 \cdot 12{,}5797 = 327{,}1$

3d De toetsingsgrootheid is het aantal keren dat er een joker getrokken wordt.
De toetsingsgrootheid is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = \frac{4}{30}$
$H_0\colon\ p = \frac{4}{30};\ H_1\colon\ p > \frac{4}{30}$
Je hebt verder de onbetrouwbaarheidsdrempel α nodig en het steekproefresultaat

4a $85 = 83 + 2 = \mu + \frac{1}{2}\sigma$
We zoeken dus het deel van de aardappels met een gewicht dat groter is dan $\mu + \frac{1}{2}\sigma$
Dit is $0{,}150 + 0{,}136 + 0{,}023$

4b 5 887 950 cent

4c $\binom{50}{15} \cdot 0{,}309^{15} \cdot (1 - 0{,}309)^{35} = 0{,}121186$

4d Barney heeft een hogere opbrengst dan Fred als een groter deel van zijn aardappelen meer dan 85 gram weegt (en een lagere als een kleiner deel meer dan 85 gram weegt).
Voor Barney geldt $\mu + \frac{1}{2}\sigma = 82 + 3\frac{1}{2} = 85\frac{1}{2}$
Dit betekent dat de kans dat een aardappel van Barney meer dan 85 gram weegt groter is dan 0,309, dus is de opbrengst van Barney (naar verwachting) hoger

5a Restschuld 1-10-2019: 124 950; 1-11-2019: 124 600
Rente 1-9-2019: 251,30; 1-10-2019: 250,60; 1-11-2019: 249,90; 1-6-2049: 1,40

5b $\frac{1}{2} \cdot 360 \cdot (252 + 0{,}70) = 45\,486$

5c 5,62765%

5d 99 dagen

6a $A = 1000;\ B = 400;\ C = \frac{2\pi}{20}$

6b 30 juli en 11 augustus

