CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Uitwerkingen Wiskunde A 19 april 2019

1a $2x^2 - 3x^3 = x \Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 - 2x + 1) = 0$
$3x^2 - 2x + 1 = 0$ geeft $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8$
$D < 0$, dus $3x^2 - 2x + 1 = 0$ heeft geen oplossing.
De enige oplossing is zodoende $x = 0$.

1b $2x - 3y = 5 \Leftrightarrow 3y = 2x - 5 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
m is dus de lijn door de oorsprong met richtingscoëfficiënt $\frac{2}{3}$, dat is de lijn $y = \frac{2}{3}x$
Snijpunt met *l*: $3x - 2 = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \frac{7}{3}x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{6}{7}$ en $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4}{7}$

1c $f'(x) = \dfrac{6(x^2+9) - 6x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{54 - 6x^2}{(x^2+9)^2}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 54 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$
Minimum: $f(-3) = \frac{-18}{9+9} = -1$; maximum: $f(3) = \frac{18}{9+9} = 1$

1d $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \dfrac{6x}{x^2+9} = \dfrac{3}{2x+3} \Leftrightarrow 6x(2x+3) = 3(x^2+9) \Leftrightarrow 12x^2 + 18x = 3x^2 + 27$
$\Leftrightarrow 9x^2 + 18x - 27 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$
$f(1) = g(1) = \frac{3}{5}$; $f(-3) = g(-3) = -1$, dus snijpunten $\left(1, \frac{3}{5}\right)$ en $(-3, -1)$.

2a Aflezen uit de grafiek: $T(maximaal) \approx 37{,}5$℃ en $T(minimaal) \approx 36{,}5$℃
Dit geeft $A = \frac{37{,}5+36{,}5}{2} = 37{,}0$℃ en $B = 37{,}5 - A = 0{,}5$℃

2b 0,262 moet gelijk zijn aan $\frac{2\pi}{periode}$.
Aflezen uit grafiek (of afleiden uit de context): $periode = 24$ (uur)
Dit geeft $\frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{24} \approx 0{,}2618$

2c De temperatuur is maximaal als de sinus maximaal is, dat is als $0{,}262(t + 1{,}45) = \frac{1}{2}\pi$
Dit geeft $t + 1{,}45 = \frac{\frac{1}{2}\pi}{0{,}262} = 6{,}00$
Ook: De sinus is maximaal op $\frac{1}{4}\text{periode} = 6\text{ uur}$ na het passeren van de evenwichtsstand op $t = -1{,}45$
Op beide manieren volgt $t = 4{,}55$
Dat is 4 uur en $0{,}55 \cdot 60 = 33$ minuten na 12:00 uur, dat is om 16:33 uur.

3a Bij $Q = 12$ is de prijs $P(12) = 10 - \sqrt{3 \cdot 12} = 10 - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$
De opbrengst is dan $12\,000 \cdot 4 = 48\,000$ euro.
$W(12) = 7 \cdot 12 - \sqrt{3 \cdot 12^3} - 6 = 84 - \sqrt{5184} - 6 = 84 - 72 - 6 = 6$,
dus de winst is 6000 euro

3b De opbrengst (in duizenden euro's) als functie van *Q* is
$R(Q) = P(Q) \cdot Q = \left(10 - \sqrt{3Q}\right) \cdot Q = 10Q - \sqrt{3Q} \cdot \sqrt{Q^2} = 10Q - \sqrt{3Q^3}$
De kosten (in duizenden euro's) worden dus gegeven door
$C(Q) = R(Q) - W(Q) = 10Q - \sqrt{3Q^3} - \left(7Q - \sqrt{3Q^3} - 6\right) = 3Q + 6$

3c Met de kettingregel krijgen we $W'(Q) = 7 - \frac{1}{2\sqrt{3Q^3}} \cdot 3 \cdot 3Q^2$
Met $W(Q) = 7Q - \sqrt{3} \cdot Q^{\frac{3}{2}} - 6$ volgt $W'(Q) = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{Q}$
$W'(12) = 7 - 9 = -2$
$W'(12) < 0$, dus de winst daalt als *Q* toeneemt.
Om de winst te laten stijgen, moet de productie juist afnemen!

3d $W'(Q) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}4Q} + 3Q \cdot \mathrm{e}^{-0{,}4Q} \cdot -0{,}4 = (3 - 1{,}2Q) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}4Q}$,
dus $W'(2{,}5) = (3 - 1{,}2 \cdot 2{,}5)\mathrm{e}^{-0{,}4 \cdot 2{,}5} = (3 - 3) \cdot \mathrm{e}^{-1} = 0$

4a $E(Y) = 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(Y = 4)$
$= 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$

4b $\sigma(S) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)} = \sqrt{\frac{35}{12} + \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{35}{12} + \frac{15}{12}} = \sqrt{\frac{50}{12}} = \sqrt{\frac{25}{6}} \approx 2{,}04$

4c $E(S) = E(X) + E(Y) = 3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} = 6$
$P(S = 6) =$
$P(X = 2 \wedge Y = 4) + P(X = 3 \wedge Y = 3) + P(X = 4 \wedge Y = 2) + P(X = 5 \wedge Y = 1)$
$= 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

4d $P(uitkomst \neq 6\ bij\ één\ worp) = \frac{5}{6}$
$P(uitkomst \neq 6\ bij\ 8\ van\ de\ 10\ worpen) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \approx 0{,}29071$
$P(uitkomst \neq 6\ bij\ 9\ van\ de\ 10\ worpen) = \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}32301$
$P(uitkomst \neq 6\ bij\ 10\ van\ de\ 10\ worpen) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}16151$
$P(uitkomst \neq 6\ bij\ ten\ hoogste\ 7\ van\ de\ 10\ worpen)$
$= 1 - (0{,}29071 + 0{,}32301 + 0{,}16151) = 0{,}22477$

5a $200 = 203 - 3 = \mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A$

PA is zodoende $0{,}191 + 0{,}191 + 0{,}150 + 0{,}136 + 0{,}023 = 0{,}191 + 0{,}500 = 0{,}691$

5b $200 = 207 - 7 = \mu_B - \frac{7}{12}\sigma_B$

De grens van het oppervlak dat overeen komt met *PB* ligt dus links van $\mu - \frac{1}{2}\sigma = 201$.

PB is dus groter dan PA.

5c H_0: $\mu = 205$; H_1: $\mu \neq 205$

5d De toetsingsgrootheid *T* is normaal verdeeld met $\mu_T = 205$ en $\sigma_T = \frac{10}{\sqrt{16}} = 2{,}5$

De grens van het verwerpingsgebied bij een tweezijdige toets met $\alpha = 5\%$ is

$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T = 205 - 1{,}96 \cdot 2{,}5 = 200{,}1$

De gevonden steekproefuitkomst is groter dan deze grens, dus wordt H_0 niet verworpen. *Er is niet genoeg reden om de bewering van houthandel C te verwerpen.*

6a Voor de verdubbelingstijd *T* geldt

$1{,}5^T = 2 \Leftrightarrow T = {}^{1{,}5}\log(2) \approx 1{,}7095$ uur ≈ 1 uur en 43 minuten

6b $W_E(10) = 600 \cdot 1{,}5^{10} \approx 34599$

$W_B(10) = 250 \cdot (700 - 1527\mathrm{e}^{-0{,}1 \cdot 10}) = 250 \cdot (700 - 1527\mathrm{e}^{-1}) \approx 34562$

6c Op te lossen: $250 \cdot (700 - 1527\mathrm{e}^{-0{,}1t}) = 0{,}17 \cdot 10^6$

Links en rechts delen door 250 geeft $700 - 1527\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 680$, dus

$1527\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 20 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}1t} = \frac{20}{1527} \Leftrightarrow -0{,}1t = \ln\left(\frac{20}{1527}\right) \Leftrightarrow t = -10 \cdot \ln\left(\frac{20}{1527}\right) \approx 43{,}35$

6d Als *t* groot wordt, dan wordt $\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ vrijwel 0

Het gewicht wordt daarom vrijwel $250 \cdot 700 = 175\,000$ microgram.