CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 19 december 2018
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	4	2	5	6	3	5
b	4	2	5	5	4	2
c	5	4	4	4	4	3
d	5	2	4	3	3	2
Totaal	18	10	18	18	14	12

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche berekeningen

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening.*
De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$*.*

Los onderstaande vergelijkingen algebraïsch op en geef als er een wortel of een logaritme in uw antwoord staat, een benadering van uw antwoord afgerond op drie cijfers achter de decimale komma.

4pt a $9x^3 + 25x = 30x^2$

4pt b $5 \cdot 4^x = 2 \cdot 5^x$

Gegeven worden de functie f met functievoorschrift $f(x) = \sqrt{8x - 12}$ en de lijn l met vergelijking $y = 2x - 6$.

5pt c Gebruik de afgeleide functie van f om aan te tonen dat de grafiek van f in het punt $A(2,2)$ evenwijdig loopt met lijn l.

5pt d Bereken algebraïsch de coördinaten van het (de) snijpunt(en) van de grafiek van f en lijn l.

Opgave 2 – Geboortegolf

Het aantal geboorten per jaar in land L is al jaren stabiel, maar het aantal geboorten per week varieert door het jaar heen. Volgens het Statistisch Bureau van land L wordt dit aantal gegeven door de formule

$$B(t) = 5200 + 200\sin\left(\frac{\pi}{13}\left(t - 8\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

In deze formule is *B* het aantal geboorten per week en is *t* de tijd in weken, met $t = 0$ op 1 januari.

2pt a Bereken de periode van de functie *B* algebraïsch.

2pt b Bereken de maximale waarde van *B* algebraïsch.

4pt c Bereken algebraïsch alle tijdstippen tussen $t = 0$ en $t = 52$ waarop het aantal geboorten per week volgens deze formule gelijk is aan 5000.

2pt d Bereken het totale aantal geboorten in een jaar (= 52 weken) volgens deze formule.

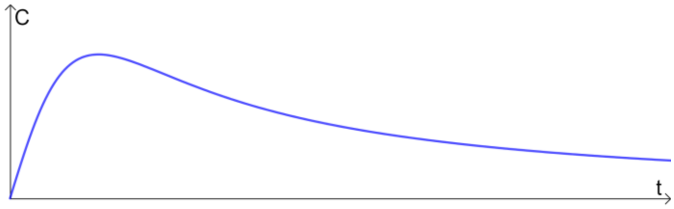
Opgave 3 – Een medicijn

Een medicijn wordt geïnjecteerd in de bloedbaan van een patiënt. De concentratie van dit medicijn in het bloed dat door de longen stroomt wordt, in een eerste model, gegeven door

$$C_1(t) = \frac{13t}{t^2 + 4}$$

(C_1 in milligram per liter, t is de tijd in uren na het toedienen van het medicijn).

In figuur 1 ziet u een schets van de grafiek van C_1 .



Figuur 1

Het medicijn is werkzaam als de concentratie meer dan 1,25 milligram per liter is.

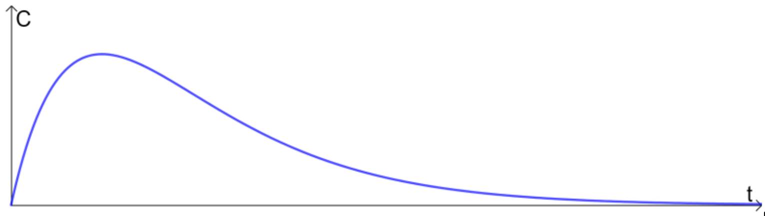
5pt **a** Los de vergelijking $C_1(t) = 1{,}25$ algebraïsch op en bereken hoe lang het medicijn werkzaam is. Geef uw antwoord in minuten.

5pt **b** Bereken de maximale waarde van $C_1(t)$ algebraïsch.

Volgens een tweede model wordt de concentratie van het medicijn in het bloed dat door de longen stroomt gegeven door de formule

$$C_2(t) = 4{,}5t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

met C_2 in milligram per liter en t zoals hierboven.
De grafiek van deze functie ziet u in figuur 2.



Figuur 2

4pt **c** Bereken het relatieve verschil tussen de concentraties volgens deze twee formules op $t = 3$. Geef uw antwoord als een percentage van de concentratie volgens de eerste formule.

Volgens de tweede formule is de concentratie van het medicijn maximaal op $t = 2$.

4pt **d** Toon met behulp van de afgeleide aan dat dit inderdaad het geval is.

Opgave 4 – Hoge nood

Als je de toiletten wilt gebruiken op een groot treinstation in Nederland, moet je 70 cent betalen. Daarvoor kun je een waardebon krijgen, waarmee je 50 cent korting krijgt bij een aankoop in één van de stationswinkels. Deze waardebonnen zijn geldig tot drie maanden na je bezoek aan de toiletten. Veel mensen vergeten om deze waardebonnen mee te nemen, deze waardebonnen laten we in deze vraag buiten beschouwing.

Ui teen statistisch onderzoek is gebleken dat 60% van de waardebonnen die wel meegenomen zijn, niet binnen drie maanden worden gebruikt.

6pt a Bereken de kans dat bij een steekproef van 10 meegenomen waardebonnen, meer dan 7 van deze 10 waardebonnen niet binnen drie maanden gebruikt worden. Geef het antwoord afgerond op 4 decimalen.

In de afgelopen tijd heeft Bram regelmatig gebruik gemaakt van de toiletten op één van de grote treinstations in Nederland. Hij heeft zodoende een aantal waardebonnen verzameld, die hij thuis in de keukenlade bewaart. Op een dag pakt hij, zonder op de datum te letten, zes van deze waardebonnen uit zijn keukenlade en stopt ze in zijn zak. Drie van deze waardebonnen zijn nog geldig, de andere drie zijn niet meer geldig. Bij het betalen bij een stationswinkel pakt hij een willekeurige waardebon uit zijn zak. Indien nodig herhaalt hij dit totdat hij een geldige waardebon heeft.
Het aantal waardebonnen dat hij uit zijn zak haalt is een toevalsvariabele X.

5pt b Toon aan dat $P(X=2)=0{,}30$ en $P(X=3)=0{,}15$.

4pt c Noteer de complete kansverdeling van X.

3pt d Bereken $E(X)$.

Opgave 5 – Twee groeimodellen

Een speelgoedfabriek brengt een nieuw speeltje op de markt. In het eerste jaar dat dit speeltje te koop is, neemt het aantal verkochte speeltjes toe met 1% per week.

3pt **a** Met hoeveel procent neem het aantal speeltjes dat per week verkocht wordt toe in een jaar? (1 jaar = 52 weken)

In de eerste week worden 10 000 speeltjes verkocht. Dit betekent dat het aantal speeltjes dat in week *n* van het eerste jaar verkocht wordt gegeven wordt door $S(n) = 10\,000 \cdot 1{,}01^{n-1}$.

4pt **b** Bereken het totale aantal speeltjes dat volgens deze formule in het eerste jaar verkocht wordt.

Op den duur zal het aantal speeltjes dat volgens bovenstaande formule per week verkocht wordt boven iedere grens uitstijgen. Daarom bekijken we een andere formule om het aantal verkochte speeltjes per week te voorspellen. Deze formule wordt gegeven door

$$S(t) = \frac{100\,000}{2 + 8\mathrm{e}^{-0{,}014t}}$$

In deze formule is t de tijd in weken met $t = 0$ in week waarin het nieuwe speeltje op de markt gebracht wordt.

4pt **c** Bereken algebraïsch op welk tijdstip de speelgoedfabrikant volgens deze tweede formule 25 000 speeltjes per week verkoopt.

3pt **d** Hoe veel speeltjes zullen er volgens de tweede formule op den duur per week verkocht worden?

Opgave 6 – Tentamens beoordelen

Bij de University of Sciencetown worden de tentamenbeoordelingen vastgesteld op basis van de scores voor het tentamen. Eerst worden het gemiddelde en de standaardafwijking bepaald van de scores van alle deelnemers. Daarna wordt de grens voor zakken of slagen bepaald op één standaarddeviatie onder de gemiddelde score. Deelnemers met een score die meer dan twee keer de standaardafwijking boven het gemiddelde ligt, krijgen de beoordeling *Excellent*. Kandidaten met een score die tussen één en twee keer de standaardafwijking boven het gemiddelde ligt, krijgen de beoordeling *Goed*.

3000 studenten nemen deel aan een tentamen van de University of Sciencetown.
We nemen aan dat hun scores normaal verdeeld zijn.

5pt a Hoeveel van deze studenten krijgen volgens de vuistregels de beoordeling *Goed*?

Omdat het percentage kandidaten dat zakt bij deze manier van beoordelen altijd ongeveer gelijk zal zijn, moet de kwaliteit van de tentamens volgens andere criteria gecontroleerd worden. Een van die criteria is het gemiddelde van de scores. In de vorige jaren waren de scores normaal verdeeld met een gemiddelde van 550 punten en een standaardafwijking van 90 punten.
Voor dit jaar nemen we aan dat de scores nog steeds normaal verdeeld zijn met een standaardafwijking van 90 punten. Om te toetsen of het gemiddelde nog steeds hetzelfde is, worden de resultaten van 100 willekeurig geselecteerde deelnemers onderzocht. Bij deze toetsingsprocedure nemen we als significantieniveau $\alpha = 5\%$.

2pt b Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

De gemiddelde score van de 100 deelnemers uit de steekproef is 567 punten. Dit geeft een overschrijdingskans van 0,029.

3pt c Bepaal de parameters van de toetsingsgrootheid die gebruikt is om deze overschrijdingskans te berekenen.

2pt d Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure bij deze steekproefuitkomst? Motiveer uw antwoord!

Einde van het tentamen.

Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn $$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\ldots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g=\mu_T-1{,}645\sigma_T$	$g=\mu_T+1{,}645\sigma_T$	$g_l=\mu_T-1{,}96\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+1{,}96\sigma_T$
0,01	$g=\mu_T-2{,}33\sigma_T$	$g=\mu_T+2{,}33\sigma_T$	$g_l=\mu_T-2{,}58\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+2{,}58\sigma_T$

