CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde B

Datum: 22 juli 2019
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	6	6	3		6	6
b	4	6	2		6	4
c	2		4		7	6
d	6		5			5
Totaal	18	12	14	6	19	21

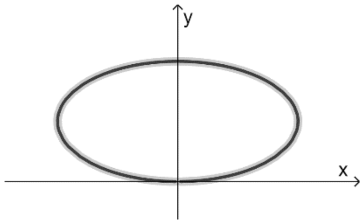
$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1

De baan van een punt *P* wordt gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{4t}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{2}{1+t^2} \end{cases}$$



Deze baan ziet u in de figuur hiernaast.

6pt **a** Bereken exact de coördinaten van de punten waar de raaklijn aan de baan van punt *P* verticaal loopt.

K is de kromme met vergelijking $x^2 + 4y^2 = 8y$.

4pt **b** Toon aan dat punt *P* voor alle waarden van t op kromme *K* ligt.

Er is één punt op kromme *K* dat niet op de baan van punt *P* ligt.

2pt **c** Bepaal de coördinaten van dit punt (motiveer uw antwoord!)

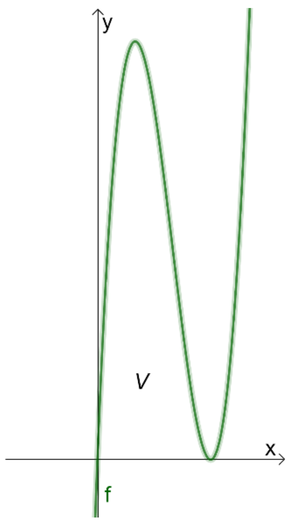
Verder wordt lijn ℓ gegeven met vergelijking $y = x$.

6pt **d** Bereken algebraïsch de hoek tussen de baan van *P* en lijn ℓ in hun snijpunt.

Opgave 2

In de figuur hiernaast ziet u de grafiek van de functie

$$f(x) = 4x^3 - 20x^2 + 25x$$



V is het begrensde vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f en de *x*-as.

6pt **a** Bereken exact de oppervlakte van vlakdeel *V*.

6pt **b** Bereken exact de waarden van a en b waarvoor de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{ax+b}$ en de grafiek van f elkaar raken in een punt op de verticale lijn $x = 1$.

Opgave 3

Gegeven worden de punten $A(4,3)$ en $B(1,7)$.
m is de rechte lijn door de oorsprong $O(0,0)$ en punt A.
n is de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3pt a Toon aan dat de lijnen *m* en *n* loodrecht op elkaar staan.

2pt b Toon aan dat punt A en punt B beide op lijn *n* liggen.

c_1 is de cirkel die door de punten A en B en door de oorsprong $O(0,0)$ gaat.

4pt c Bereken de coördinaten van het middelpunt van cirkel c_1 .

c_2 is de cirkel met de volgende eigenschappen:

- Het middelpunt van c_2 ligt op de positieve *x*-as.
- De straal van c_2 is 4.
- De lijnen $y = 2x$ en $y = -2x$ zijn beide raaklijnen van cirkel c_2 .

5pt d Bereken de *x*-coördinaat van het middelpunt van cirkel c_2 .

Opgave 4

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$, ofwel $f(x) = \mathrm{e}^{g(x)}$ met $g(x) = \frac{1}{x}$.
De grafiek van f heeft één buigpunt.

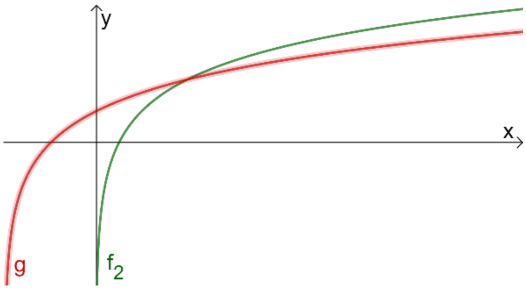
6pt Bereken exact de coördinaten van dit buigpunt.

Opgave 5

Voor iedere $a > 0$ wordt de functie f_a gegeven door $f_a(x) = \ln(ax)$.
P_a is het snijpunt van de grafiek van f_a met de *x*-as.
ℓ_a is de rechte lijn die de grafiek van f_a loodrecht snijdt in punt P_a .

6pt a Bereken exact de waarde(n) van a waarvoor de lijn ℓ_a de *y*-as snijdt in het punt $(0{,}4)$.

In de figuur hiernaast ziet u de grafieken van de functies $f_2(x) = \ln(2x)$ en $g(x) = \ln(2 + x)$.
Voor iedere $p > 0$ is F_p het punt $\big(p, f_2(p)\big)$ en is G_p het punt $\big(p, g(p)\big)$.



6pt b Bereken exact de waarde(n) van p waarvoor de afstand tussen de punten F_p en G_p gelijk is aan 1.

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van g, de *x*-as en de *y*-as.
S is het omwentelingslichaam dat ontstaat als *V* wordt gewenteld rond de *y*-as.

7pt c Bereken exact de inhoud van *S*.

Opgave 6 staat op de volgende pagina!

Opgave 6

Voor $0 \leq x \leq 2\pi$ wordt de functie f gegeven door

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(x) + \sin(2x)}$$

6pt **a** Bereken exact de coördinaten van de perforaties van de grafiek van f (dat zijn de punten waar de grafiek van f een ophefbare discontinuïteit heeft) op het interval $[0,\ 2\pi]$.

4pt **b** Bereken exact de vergelijking(en) van de verticale asymptoot/asymptoten van de grafiek van f op het interval $[0,\ 2\pi]$.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = \cos(2x) + \sin\left(3x + \frac{1}{3}\pi\right)$.

6pt **c** Bereken exact de *x*-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van g met de *x*-as op het interval $[0,\ 2\pi]$.

Punt *A* is het snijpunt van de grafiek van g met de *y*-as.
ℓ is de raaklijn aan de grafiek van g in punt *A*.
Punt *B* is het snijpunt van lijn ℓ met de *x*-as.

5pt **d** Bereken exact de *x*-coördinaat van punt *B*.

Einde van het tentamen.
Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

Formulelijst wiskunde B

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$

$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$

$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$

$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$

$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$

$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$

Antwoorden

1a	$(2{,}1)$ en $(-2{,}1)$
1b	$\left(x(t)\right)^2 + 4\left(y(t)\right)^2 = \frac{16t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{4\cdot 4}{(1+t^2)^2} = \frac{16(t^2+1)}{(1+t^2)^2} = \frac{16}{1+t^2} = 8y$
1c	De oorsprong $(0{,}0)$ ligt wel op *K*, maar $y(t) \neq 0$, dus ligt de oorsprong niet op de baan van *P*
1d	$78{,}69°$
2a	$\frac{625}{48}$
2b	$a = -54;\ b = 135$
3a	Twee lijnen staan loodrecht op elkaar als het inproduct van hun richtingsvectoren 0 is. De richtingsvector van *m* is $\binom{4}{3}$ en de richtingsvector van *n* is $\binom{-3}{4}$ $\left(\binom{4}{3}\cdot\binom{-3}{4}\right) = 4\cdot -3 + 3\cdot 4 = 0$
3b	$\binom{4}{3} = \binom{7}{-1} + \lambda\binom{-3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 7 - 3\lambda \\ 3 = -1 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$ voldoet $\binom{1}{7} = \binom{7}{-1} + \lambda\binom{-3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 7 - 3\lambda \\ 7 = -1 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2$ voldoet
3c	$\left(\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$
3d	$\sqrt{20}$
4	$x = -\frac{1}{2};\ y = \mathrm{e}^{-2}$
5a	$a = \frac{1}{2}$
5b	$p = \frac{2}{2\mathrm{e}-1}$
5c	$\pi\cdot\left(-2\frac{1}{2} + 4\ln(2)\right)$
6a	$\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{3}\right)$ en $\left(1\frac{1}{2}\pi, -1\right)$
6b	$x = 1\frac{1}{6}\pi$ en $x = 1\frac{5}{6}\pi$
6c	$\frac{7}{30}\pi,\ \frac{19}{30}\pi,\ \frac{31}{30}\pi,\ \frac{43}{30}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ en $\frac{7}{6}\pi$
6d	$x_B = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3}$

