CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde B

Datum:	19 april 2019
Tijd:	13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven:	6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	5	4	5	5	6	5
b	5	4	6	5	7	5
c	4	2	5	5		5
d		4				3
Totaal	14	14	16	15	13	18

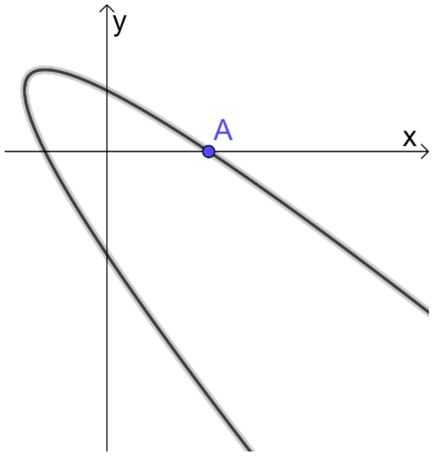
$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1

De baan van een punt *P* is gegeven door de bewegingsvergelijkingen

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t - 3 \\ y(t) = -t^2 + 4 \end{cases}$$



Deze baan ziet u in de figuur hiernaast.
A is het snijpunt van de baan van *P* met de positieve *x*-as.

5pt a Bereken exact de afstand tussen de snijpunten van de baan van *P* en de lijn l met vergelijking $y = x + 7$.

5pt b Stel een vectorvoorstelling op voor de raaklijn aan de baan van *P* in *A*.

4pt c Bereken exact de minimale snelheid (dat is de lengte van de snelheidsvector) van punt *P*.

Opgave 2

Cirkel c_1 gaat door de punten $A(1,2)$ en $B(3,8)$.
Het middelpunt *C* van cirkel c_1 ligt op de *x*-as.

4pt a Bereken de *x*-coördinaat van middelpunt *C*.

c_2 is de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.
Lijn *m* is de raaklijn aan cirkel c_2 in de oorsprong $O(0,0)$.

4pt b Bereken de hoek tussen lijn *m* en de positieve *x*-as.

Cirkel c_3 gaat door de oorsprong $O(0,0)$ en door de punten $D(-6,4)$ en $E(6,9)$.

2pt c Toon aan dat de vectoren $\overrightarrow{OD}$ en $\overrightarrow{OE}$ loodrecht op elkaar staan.

4pt d Bereken de coördinaten van het middelpunt van cirkel c_3.

Opgave 3

Voor iedere waarde van a wordt de functie f_a gegeven door

$$f_a(x) = \frac{3x^3 - 3x^2 + ax}{x^2 - 4}$$

Er zijn twee waarden van a waarvoor de grafiek van f_a een perforatie (dat is een ophefbare discontinuïteit) heeft.

5pt a Bereken deze twee waarden van a.

In de rest van deze opgave nemen we $a = 0$.
Verder wordt de functie g gegeven door $g(x) = (1 - x) \cdot \mathrm{e}^{1-x}$.

6pt b Toon aan dat de grafieken van f_0 en g elkaar raken in het punt $P(1,0)$.

5pt c Stel een vergelijking op voor de scheve asymptoot van de grafiek van f_0 .

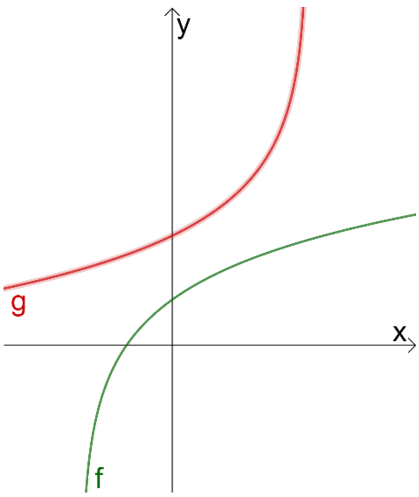
Opgave 4

In de figuur hiernaast ziet u de grafieken van de functies

$$f(x) = {}^{2}\log(x + 2)$$

en

$$g(x) = {}^{2}\log\left(\frac{16}{3 - x}\right)$$



Voor iedere p in het gemeenschappelijke domein van f en g zijn de punten F_p en G_p de snijpunten van de verticale lijn $x = p$ met de grafiek van f, respectievelijk de grafiek van g.

5pt a Bereken de waarde(n) van p waarvoor de afstand tussen de punten F_p en G_p gelijk is aan 2.

5pt b Bereken de waarde(n) van p waarvoor de afstand tussen de punten F_p en G_p minimaal is.

Verder wordt de functie h gegeven door $h(x) = {}^{4}\log(x^2 + 4x + 4)$.

5pt c Bepaal de waarden van x waarvoor $f(x) = h(x)$.

Opgave 5

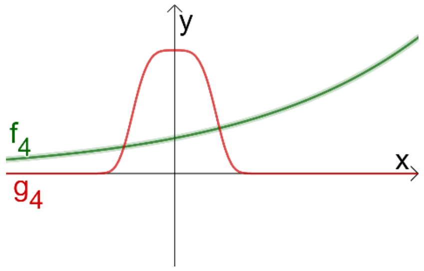
Voor ieder positief geheel getal a worden de functies f_a en g_a gegeven door

$$f_a(x) = \exp\left(\frac{x-1}{a}\right)$$

en

$$g_a(x) = \exp(1 - x^a)$$

N.B.: $\exp(X) = \mathrm{e}^X$



In de figuur rechtsboven ziet u de grafieken van de functies f_4 en g_4 .

6pt **a** Toon aan dat voor ieder positieve gehele waarde van a geldt dat de grafieken van f_a en g_a elkaar onder een rechte hoek snijden in het punt $S(1,1)$.

Voor iedere $p > 1$ is V_p het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $x = 1$, de lijn $x = p$, de grafiek van f_4 en de *x*-as, en is S_p het omwentelingslichaam dat ontstaat als V_p rond de *x*-as gewenteld wordt.

7pt **b** Bereken de waarde van p waarvoor de inhoud van S_p gelijk is aan 2π .

Opgave 6

Gegeven worden de functies $f(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x) - 1$ en $g(x) = \cos^2(x)$.

5pt **a** Bereken de *x*-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de *x*-as op het interval $0 \leq x \leq 2\pi$.

5pt **b** Toon aan dat $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ een primitieve is van $g(x)$.

5pt **c** Bereken $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Verder worden gegeven de functies $h(x) = \cos(5x)$ en $k(x) = \cos\left(5x - \frac{1}{4}\pi\right)$.

3pt **d** Bepaal het aantal snijpunten van de grafieken van h en k op het interval $0 \leq x \leq \pi$.

Einde van het tentamen.
Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

Formulelijst wiskunde B

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$

$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$

$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$

$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$

$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$

$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$