

## Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 20 april 2026

### Vraag 1a - 6 punten

$$f(x) = (e^{2x} - e^x)^2 \text{ geeft } f'(x) = 2 \cdot (e^{2x} - e^x) \cdot (2e^{2x} - e^x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x = 0 \vee 2e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e^x \vee 2e^{2x} = e^x$$

$$\text{Delen door } e^x \text{ geeft } e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } 2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

In de grafiek zien we dat het maximum niet bij  $x = 0$  ligt, maar bij een  $x < 0$ .

Het maximum ligt dus bij  $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

### Alternatief:

$$f(x) = e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x} \text{ geeft } f'(x) = 4e^{4x} - 6e^{3x} + 2e^{2x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^{4x} - 6e^{3x} + 2e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 4y^4 - 6y^3 + 2y^2 = 0 \text{ met } y = e^x$$

$$4y^4 - 6y^3 + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2(2y^2 - 3y + 1) = 0 \Leftrightarrow 2y^2 = 0 \text{ (zonder oplossingen voor } x)$$

$$\text{of } 2y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = 1$$

$$y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right); y = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

In de grafiek zien we dat het maximum niet bij  $x = 0$  ligt, maar bij een  $x < 0$ .

Het maximum ligt dus bij  $x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

### Vraag 1b - 6 punten

$$f(x) = (e^{2x} - e^x)^2 = (e^{2x})^2 - 2 \cdot e^{2x} \cdot e^x + (e^x)^2 = e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x}$$

Te berekenen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(\sqrt{2})} f(x) dx &= \int_0^{\ln(\sqrt{2})} e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x} dx = \left[ \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{2}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\ln(\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^4 - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{2})^3 + \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2})^2 - \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12} - \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

### Vraag 1c - 5 punten

$$g(x) = \ln(3x) \Rightarrow g'(x) = \frac{[3x]'}{3x} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x} \text{ of } g(x) = \ln(x) + \ln(3) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Dit geeft } g\left(\frac{1}{3}e\right) = \ln(e) = 1 \text{ en } g'\left(\frac{1}{3}e\right) = 3e^{-1}$$

De raaklijn is dus de lijn door  $A\left(\frac{1}{3}e, 1\right)$  met richtingscoëfficiënt  $3e^{-1}$

$$\text{Een vergelijking voor deze lijn is } y - 1 = 3e^{-1} \left(x - \frac{1}{3}e\right) \Leftrightarrow y = 3e^{-1}x$$

Deze lijn snijdt de x-as in de oorsprong  $O(0,0)$

### Vraag 1d - 3 punten

$$\begin{aligned} H'(x) &= 1 \cdot (\ln(3x))^2 + x \cdot 2 \ln(3x) \cdot [\ln(3x)]' - 2 \cdot \ln(3x) - 2x \cdot [\ln(3x)]' + 2 \\ &= (\ln(3x))^2 + x \cdot 2 \ln(3x) \cdot \frac{1}{x} - 2 \ln(3x) - 2x \cdot \frac{1}{x} + 2 \\ &= (\ln(3x))^2 + 2 \ln(3x) - 2 \ln(3x) - 2 + 2 = (\ln(3x))^2 = (g(x))^2 \end{aligned}$$

### Vraag 1e - 5 punten

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x) = \ln(1) \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is dus

$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}e} (g(x))^2 dy &= \pi \cdot [x \cdot (\ln(3x))^2 - 2x \ln(3x) + 2x]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}e} \\ &= \pi \cdot \left( \frac{1}{3}e \cdot (\ln(e))^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}e \ln(e) + 2 \cdot \frac{1}{3}e - \left( \frac{1}{3}(\ln(1))^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \ln(1) + 2 \cdot \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \pi \cdot \left( \frac{1}{3}e - \frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \left( 0 - 0 + \frac{2}{3} \right) \right) = \pi \cdot \left( \frac{1}{3}e - \frac{2}{3} \right) \quad \left( = \frac{1}{3}\pi(e - 2) \right) \end{aligned}$$

### Vraag 2a - 5 punten

$$\text{In de perforaties geldt } x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

$$\text{en } x + a = 0 \Leftrightarrow x = -a$$

Er zijn dus perforaties voor  $a = 0$  (met  $x$ -coördinaat 0) en voor  $a = 1$  (met  $x$ -coördinaat  $-1$ )

Voor  $a = 0$  en  $x \neq 0$  geldt

$$f_0(x) = \frac{x^2 + x}{x} = \frac{x(x + 1)}{x} = x + 1 \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{ofwel } \lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1$$

Voor  $a = 1$  en  $x \neq -1$  geldt

$$f_1(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1} = \frac{x(x + 1)}{x + 1} = x \rightarrow -1 \quad (x \rightarrow -1)$$

$$\text{ofwel } \lim_{x \rightarrow -1} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$$

De perforatie van  $f_0$  is dus  $(0,1)$  en de perforatie van  $f_1$  is  $(-1, -1)$

### Vraag 2b - 5 punten

Er zijn twee extremen als de vergelijking  $f'_a(x) = 0$  twee oplossingen heeft.

$$f'_a(x) = \frac{(2x + 1) \cdot (x + a) - (x^2 + x) \cdot 1}{(x + a)^2} = \frac{2x^2 + 2ax + x + a - x^2 - x}{(x + a)^2} = \frac{x^2 + 2ax + a}{(x + a)^2}$$

$$\text{dus } f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2ax + a = 0$$

De discriminant van deze vergelijking is  $(2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 4a^2 - 4a$

Er zijn twee oplossingen als deze discriminant positief is.

$4a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a(a - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = 1$ ; de discriminant is positief voor  $a < 0$  en voor  $a > 1$

### Vraag 2c - 4 punten

De verticale asymptoot is  $x = -2$

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{x^2 + x}{x + 2} = \frac{x^2 + 2x - x}{x + 2} = \frac{x(x + 2)}{x + 2} - \frac{x}{x + 2} = x - \frac{x + 2 - 2}{x + 2} \\ &= x - \frac{x + 2}{x + 2} + \frac{2}{x + 2} = x - 1 + \frac{2}{x + 2} \end{aligned}$$

Kan ook met een staartdeling

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x + 2} = 0.$$

De scheve asymptoot van  $f_2$  is dus  $y = x - 1$

### Vraag 2d - 6 punten

Te berekenen is  $\int_0^4 f_2(x) - (x - 1) dx$

$$f_2(x) - (x - 1) = \frac{x^2 + x}{x + 2} - (x - 1) \cdot \frac{x + 2}{x + 2} = \frac{x^2 + x - (x^2 + x - 2)}{x + 2} = \frac{2}{x + 2}$$

Kan ook met een berekening uit vraag c:

$$f_2(x) = x - 1 + \frac{2}{x + 2} \Rightarrow f_2(x) - (x - 1) = \frac{2}{x + 2}$$

Hieruit volgt

$$\int_0^4 f_2(x) - (x - 1) dx = \int_0^4 \frac{2}{x + 2} dx = [2 \ln(x + 2)]_0^4 = 2 \ln(6) - 2 \ln(2) = 2 \ln\left(\frac{6}{2}\right) = 2 \ln(3) = \ln(9)$$

### Vraag 3a - 6 punten

De raaklijn loopt horizontaal als  $\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{dx}{dt} \neq 0$

$$\frac{dy}{dt} = -3 \sin(3t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \sin(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t = 0 + k \cdot \pi \Leftrightarrow t = 0 + k \cdot \frac{1}{3}\pi$$

Oplossingen op het interval  $0 \leq t \leq 2\pi$ :

$$t = 0, t = \frac{1}{3}\pi, t = \frac{2}{3}\pi, t = \pi, t = 1\frac{1}{3}\pi, t = 1\frac{2}{3}\pi, t = 2\pi$$

Voor al deze waarden van  $t$  geldt  $\frac{dx}{dt} = 2 \cos(t) \neq 0$

$$t = 0 \text{ en } t = 2\pi \text{ geven } x = 0 \text{ en } y = 1$$

$$t = \frac{1}{3}\pi \text{ geeft } x = \sqrt{3} \text{ en } y = -1$$

$$t = \frac{2}{3}\pi \text{ geeft } x = \sqrt{3} \text{ en } y = 1$$

$$t = \pi \text{ geeft } x = 0 \text{ en } y = -1$$

$$t = 1\frac{1}{3}\pi \text{ geeft } x = -\sqrt{3} \text{ en } y = 1$$

$$t = 1\frac{2}{3}\pi \text{ geeft } x = -\sqrt{3} \text{ en } y = -1$$

### Vraag 3b - 3 punten

$$x = 1 \Leftrightarrow 2 \sin(t) = 1 \Leftrightarrow \sin(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$$

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ geeft } y = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0, t = \frac{5}{6}\pi \text{ geeft } y = \cos\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 0$$

De baan van  $P$  komt dus twee keer door punt  $A$ .

Je kunt ook beginnen met  $y = 0 \Leftrightarrow \cos(3t) = 0 \Leftrightarrow 3t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{1}{3}\pi$

Invullen van deze waarden van  $t$  geeft de  $x$ -coördinaten van de snijpunten met de  $x$ -as.

$$t = \frac{1}{6}\pi \text{ en } t = \frac{5}{6}\pi \text{ geven beide } x = 1$$

### Vraag 3c - 5 punten

$$x = 1 \Leftrightarrow 2 \sin(t) = 1 \Leftrightarrow \sin(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$$

$$x'(t) = 2 \cos(t), \quad y'(t) = -3 \sin(3t)$$

Dit geeft

$$x'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2 \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \sqrt{3}, \quad x'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 2 \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\sqrt{3}$$

$$y'\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -3 \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -3, \quad y'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -3 \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = -3$$

Vervolg met cosinusformule:

De richtingsvectoren van de raaklijnen zijn  $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}$

Voor de hoek  $\alpha$  tussen de raaklijnen geldt dus

$$\cos(\alpha) = \frac{\left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}\right)}{\left|\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-3 + 9}{\sqrt{3+9} \cdot \sqrt{3+9}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Dit geeft  $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$  ofwel  $\frac{1}{3}\pi$

Vervolg met tangens:

De richtingscoëfficiënten van de raaklijnen zijn  $\frac{3}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$  en  $\frac{-3}{-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -60^\circ; \quad \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

De hoek tussen de raaklijnen is dus  $60^\circ - (-60^\circ) = 120^\circ$

Dit komt overeen met een scherpe hoek van  $60^\circ$  ofwel  $\frac{1}{3}\pi$

### Vraag 3d - 6 punten

$$y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \cos(3t) = \sin(t) \Leftrightarrow \cos(3t) = \cos\left(t - \frac{1}{2}\pi\right) \text{ [of } \cos(3t) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - t\right)]$$

$$\text{Dit geeft } 3t = t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = \frac{1}{2}\pi - t + k \cdot 2\pi$$

$$3t = t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2t = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$3t = \frac{1}{2}\pi - t + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 4t = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$$

Oplossingen op het interval  $0 \leq t \leq 2\pi$ :

$$t = -\frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{3}{4}\pi, \quad t = -\frac{1}{4}\pi + 2\pi = 1\frac{3}{4}\pi,$$

$$t = \frac{1}{8}\pi, \quad t = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{8}\pi, \quad t = \frac{1}{8}\pi + \pi = 1\frac{1}{8}\pi, \quad t = \frac{1}{8}\pi + 1\frac{1}{2}\pi = 1\frac{5}{8}\pi$$

Alternatieve omzettingen:

$$y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \cos(3t) = \sin(t) \Leftrightarrow \sin\left(3t + \frac{1}{2}\pi\right) = \sin(t)$$

$$\text{Dit geeft } 3t + \frac{1}{2}\pi = t + k \cdot 2\pi \vee 3t + \frac{1}{2}\pi = \pi - t + k \cdot 2\pi$$

Met hetzelfde vervolg als hierboven

$$y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \cos(3t) = \sin(t) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{2}\pi - 3t\right) = \sin(t)$$

$$\text{Dit geeft } \frac{1}{2}\pi - 3t = t + k \cdot 2\pi \vee \frac{1}{2}\pi - 3t = \pi - t + k \cdot 2\pi$$

Weer met hetzelfde vervolg als hierboven

### Vraag 4a - 3 punten

Omdat  $c_1$  en  $c_2$  elkaar raken in punt  $A$  is de lijn door  $A$  en  $M_1$  dezelfde als de lijn door  $A$  en  $M_2$ .

Omdat  $c_2$  door  $M_1$  gaat, betekent dit dat  $M_2$  halverwege  $A(-10,5)$  en  $M_1(2, -1)$  ligt.

Dit geeft  $x_{M_2} = \frac{-10+2}{2} = -4$  en  $y_{M_2} = \frac{5+(-1)}{2} = 2$

### Vraag 4b - 7 punten

Omdat  $c_1$  en  $c_3$  elkaar raken in punt  $B$  is de lijn door  $B(8,11)$  en  $M_1(2, -1)$  dezelfde als de lijn door  $B$  en  $M_3$ , het middelpunt van  $c_3$ .

$d(B, M_3) = r_3 = \sqrt{20}$ ,  $d(B, M_1) = r_1 = \sqrt{180}$ , dus

$$d(B, M_3) = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{180}} d(B, M_1) = \sqrt{\frac{1}{9}} d(B, M_1) = \frac{1}{3} d(B, M_1)$$

Dit geeft  $\overrightarrow{BM_3} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BM_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt  $\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM_3} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ , dus  $M_3$  is het punt  $(6,7)$

Cirkels raken elkaar als de afstand tussen de middelpunten gelijk is aan de som van de stralen.

Dit is hier inderdaad het geval want

$r_2$ , de straal van  $c_2$ , is gelijk aan  $d(A, M_2) = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Ook:  $r_2 = \frac{1}{2} r_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$r_3 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

en  $d(M_2, M_3) = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

#### Alternatief:

Omdat  $c_1$  en  $c_2$  elkaar raken in punt  $A$  is de lijn door  $A$  en  $M_1$  dezelfde als de lijn door  $A$  en  $M_2$ .

Omdat  $c_1$  en  $c_3$  elkaar raken in punt  $B$  is de lijn door  $B$  en  $M_1$  dezelfde als de lijn door  $B$  en  $M_3$ , het middelpunt van  $c_3$ .

Hieruit volgt  $\angle M_2 M_1 M_3 = \angle A M_1 B$

Dit is een rechte hoek, want  $d(A, B)^2 = 18^2 + 6^2 = 360$  en  $d(A, M_1)^2 + d(B, M_1)^2 = 180 + 180 = 360$  (omgekeerde stelling van Pythagoras)

Kan ook door te laten zien dat het inproduct van  $\overrightarrow{AM_1}$  en  $\overrightarrow{BM_1}$  gelijk is aan 0 en door aan te tonen dat het product van de richtingsvectoren van de lijnen  $AM_1$  en  $BM_1$  gelijk is aan  $-1$

$d(M_2, M_1) = r_2 = \frac{1}{2} d(A, M_1) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$d(M_3, M_1) = d(B, M_1) - d(B, M_3) = r_1 - r_3 = \sqrt{180} - \sqrt{20} = 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

Omdat  $\angle M_2 M_1 M_3$  recht is, volgt hier uit:

$d(M_2, M_3)^2 = d(M_2, M_1)^2 + d(M_3, M_1)^2 = 9 \cdot 5 + 16 \cdot 5 = 125$ , dus  $d(M_2, M_3) = 5\sqrt{5}$

Cirkels raken elkaar als de afstand tussen de middelpunten gelijk is aan de som van de stralen.

Dit is hier inderdaad het geval want  $5\sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = r_2 + r_3$

### Vraag 4c - 6 punten

Met vergelijkingen lijn  $AB$  en loodlijn op  $AB$  uit de oorsprong

De lijn  $k$  door  $A(-10,5)$  en  $B(8,11)$  heeft richtingscoëfficiënt  $\frac{11-5}{8-(-10)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

Een vergelijking voor lijn  $k$  is dus  $y - 5 = \frac{1}{3}(x + 10) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 8\frac{1}{3}$

De lijn  $l$  door  $O(0,0)$  en het raakpunt  $R$  staat loodrecht op lijn  $k$  en heeft dus richtingscoëfficiënt  $-3$  (want  $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$ )

De vergelijking van lijn  $l$  is zodoende  $y = -3x$

Het raakpunt  $R$  is het snijpunt van lijnen  $k$  en  $l$ . Dit vinden we door op te lossen  $\frac{1}{3}x + 8\frac{1}{3} = -3x \Leftrightarrow 3\frac{1}{3}x = -8\frac{1}{3} \Leftrightarrow 10x = -25 \Leftrightarrow x = -2\frac{1}{2}$ ; dit geeft  $y = 7\frac{1}{2}$

De straal van  $c_4$  is  $d(O, R) = \sqrt{\left(-2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(7\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{250}{4}} = \sqrt{62\frac{1}{2}}$

De vergelijking van  $c_4$  is zodoende  $x^2 + y^2 = 62\frac{1}{2}$

Met vergelijking lijn  $AB$  en afstandsformule tot de oorsprong

De lijn  $k$  door  $A(-10,5)$  en  $B(8,11)$  heeft richtingscoëfficiënt  $\frac{11-5}{8-(-10)} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

Een vergelijking voor lijn  $k$  is dus  $y - 5 = \frac{1}{3}(x + 10) \Leftrightarrow -x + 3y = 25$

De afstandsformule  $d(P, k) = \frac{|ax_p + by_p - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  geeft  $d(O, k) = \frac{|0+0-25|}{\sqrt{1+9}} = \frac{25}{\sqrt{10}}$

Dit is de straal van  $c_4$ .

De vergelijking van  $c_4$  is zodoende  $x^2 + y^2 = \left(\frac{25}{\sqrt{10}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{625}{10}$

Met vectorvoorstellingen lijn  $AB$  en loodlijn op  $AB$  uit de oorsprong

De lijn  $k$  door  $A(-10,5)$  en  $B(8,11)$  heeft vectorvoorstelling  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$

De lijn  $l$  die loodrecht op  $k$  staat en door de oorsprong gaat, heeft richtingsvector  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(of een veelvoud hiervan, want het inproduct  $\left(\begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 18 \cdot -1 + 6 \cdot 3 = 0$ )

en heeft dus vectorvoorstelling  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Het raakpunt  $R$  is het snijpunt van lijn  $k$  en lijn  $l$ . Dit vinden we door op te lossen:

$\begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 10 - 18\lambda \\ 3\mu = 5 + 6\lambda \end{cases} \Rightarrow 5 + 6\lambda = 30 - 54\lambda \Leftrightarrow 60\lambda = 25 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{12}$

Dit geeft  $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{5}{12} \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ 7\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Alternatief voor of controle van deze berekening:

$\mu = 10 - 18\lambda = 10 - 18 \cdot \frac{5}{12} = 2\frac{1}{2}$  geeft  $\overrightarrow{OR} = 2\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{1}{2} \\ 7\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

De straal van cirkel  $c_4$  is  $|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{\left(-2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(7\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{250}{4}} = \sqrt{62\frac{1}{2}}$

De vergelijking van  $c_4$  is zodoende  $x^2 + y^2 = 62\frac{1}{2}$