

# CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

## Tentamen Wiskunde B

Datum: 17 december 2024

Tijd: 13.30 – 16.30 uur

Aantal opgaven: 4

**Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.**

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.

Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan.**

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

| Te behalen punten per onderdeel:                      |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|
| Opgave  | 1  | 2  | 3  | 4  |
| a   | 6  | 6  | 5  | 6  |
| b   | 4  | 2  | 4  | 7  |
| c   | 4  | 4  | 8  | 6  |
| d   | 7  | 7  | 5  |    |
| Totaal  | 21 | 19 | 22 | 19 |
| Cijfer = $\frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$ |    |    |    |    |
| U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.        |    |    |    |    |

## Opgave 1 – Gebroken functies

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functie  $f$  wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{2x^2 - 3x - 2}$$

6pt a Bereken exact de coördinaten van het snijpunt van de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in het punt  $(0,5)$  en de lijn met vergelijking  $x - 6y = 25$ .

4pt b Bereken exact de waarde(n) van  $x$  waarvoor geldt  $f(x) = 1$ .

De functie  $g$  wordt gegeven door

$$g(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^3 - 3x^2}$$

De grafiek van  $g$  heeft één perforatie (in sommige boeken wordt dit een ophefbare discontinuïteit genoemd).

4pt c Bereken exact de coördinaten van deze perforatie.

De familie functies  $h_a$  wordt gegeven door

$$h_a(x) = \frac{10}{x^4 - 4x^2 + a}$$

7pt d Bereken exact de waarden van  $a$  waarvoor de grafiek van  $h_a$  vier snijpunten heeft met de horizontale lijn  $y = 5$ .

## Opgave 2 – Een bijzondere familie

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De familie functies  $f_p$  wordt gegeven door  $f_p(x) = e^{x^2-2x} + p \cdot (x^2 - 2x)$ .

Merk op dat voor elke waarde van  $p$  geldt:

$$f_p(0) = e^0 + p \cdot 0 = 1 + 0 = 1 \quad \text{en} \quad f_p(2) = e^0 + p \cdot 0 = 1 + 0 = 1.$$

De grafieken van alle functies  $f_p$  gaan dus door de punten  $A(0,1)$  en  $B(2,1)$ .

In vraag a nemen we  $p = -e^3$ . Dit geeft  $f_{-e^3}(x) = e^{x^2-2x} - e^3 \cdot (x^2 - 2x)$ .

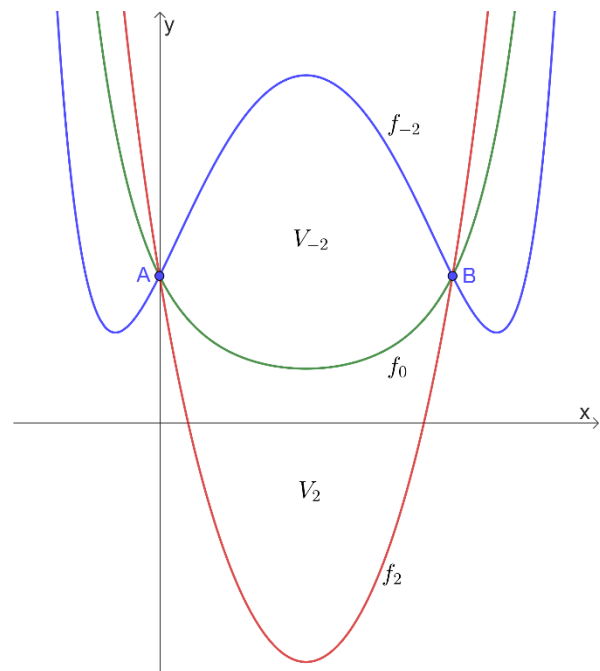
- 6pt a Bereken exact de coördinaten van de punten op de grafiek van  $f_{-e^3}$  waar deze functie een extreme waarde (minimum of maximum) heeft.

Voor alle waarden van  $p$  is  $P_p$  het punt op de grafiek van  $f_p$  met  $x_p = 1$ .

- 2pt b Toon met een exacte berekening aan dat de raaklijn aan de grafiek van  $f_p$  in het punt  $P_p$  voor alle waarden van  $p$  horizontaal is.
- 4pt c Bereken exact de waarde van  $p$  waarvoor geldt  $f_p''(1) = 0$ .

De grafieken van  $f_p$  en  $f_0(x) = e^{x^2-2x}$  sluiten voor alle  $p \neq 0$  een vlakdeel  $V_p$  in, dat ligt tussen de punten  $A(0,1)$  en  $B(2,1)$ . In de figuur hiernaast ziet u bijvoorbeeld de grafieken van  $f_0$ ,  $f_{-2}$  en  $f_2$  met de bijbehorende vlakdelen  $V_{-2}$  en  $V_2$ .

- 7pt d Bereken exact de waarde(n) van  $p$  waarvoor de oppervlakte van vlakdeel  $V_p$  gelijk is aan 4.



### Opgave 3 – Twee logaritmische functies en twee cirkels

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functies  $f$  en  $g$  worden gegeven door  $f(x) = \ln(2x^2 - x)$   
en  $g(x) = 2 \cdot \ln(x - 2)$ .

5pt a Los de vergelijking  $f(x) = g(x)$  exact op.

De horizontale lijn  $y = 1$  snijdt de grafiek van  $f$  in de punten  $P$  en  $Q$ .

4pt b Bereken exact de afstand tussen de punten  $P$  en  $Q$ .

Punt  $A$  is het snijpunt van de grafiek van  $f$  met de positieve  $x$ -as.

Punt  $B$  is het snijpunt van de grafiek van  $g$  met de  $x$ -as.

Cirkel  $c_1$  raakt de grafiek van  $f$  in punt  $A$ .

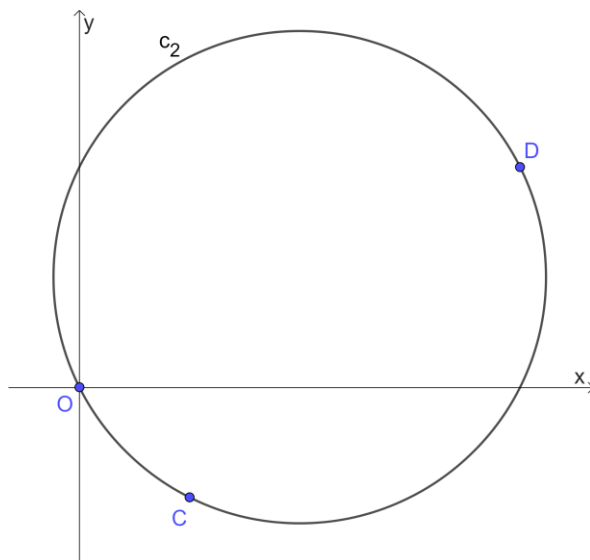
Het middelpunt  $M$  van cirkel  $c_1$  ligt op de verticale lijn die door punt  $B$  gaat.

8pt c Bereken exact een vergelijking voor cirkel  $c_1$ .

In de figuur hieronder ziet u cirkel  $c_2$ , die door de oorsprong  $O(0,0)$  en door het punt  $C(2, -2)$  gaat. De straal van cirkel  $c_2$  is  $r = 2\sqrt{5}$ .

Het lijnstuk  $OD$  is een middellijn van cirkel  $c_2$ .

5pt d Bereken exact de oppervlakte van driehoek  $OCD$ .



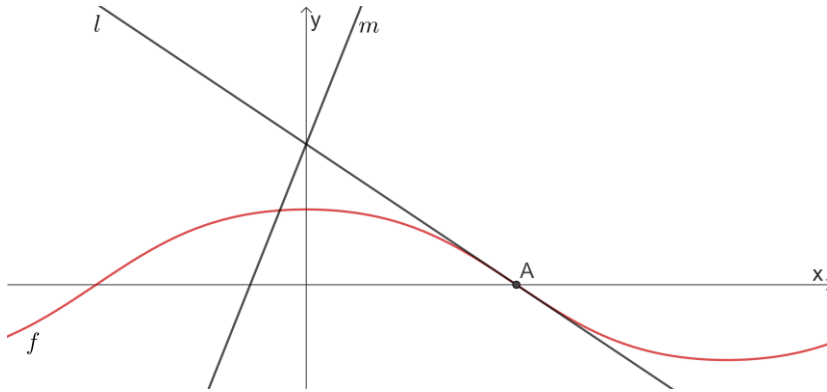
## Opgave 4 – Twee goniometrische functies en een vergelijking

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie  $f(x) = 2 \sin\left(\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right)$ .

Lijn  $l$  is de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in het punt  $A\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ .

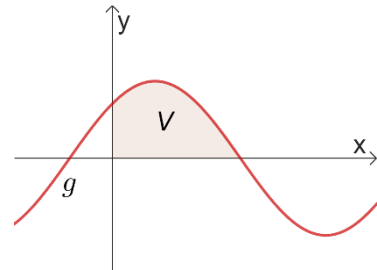
Lijn  $m$  is de lijn met vectorvoorstelling  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ .



- 6pt a Bereken algebraïsch de hoek tussen lijn  $l$  en lijn  $m$ .  
Geef uw antwoord in graden, afgerond op één cijfer achter de komma.

In de figuur hiernaast ziet u een deel van de grafiek van de functie  $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$ .

$V$  is het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van  $g$ , de  $x$ -as en de  $y$ -as en dat rechts van de  $y$ -as ligt.



- 7pt b Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als  $V$  gewenteld wordt rond de  $x$ -as.
- 6pt c Los de vergelijking  $\sin(3x) = \cos(5x)$  exact op en geef alle oplossingen die op het interval  $0 \leq x \leq \pi$  liggen.

*Einde van het tentamen.*

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*

*Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.*

*Wat er **niet** in het mapje moet:*

- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;*
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;*
- kladpapier;*
- deze opgaven.*

*Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.*

*Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).*

## **Formulelijst wiskunde B**

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$