Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 17 december 2024

Vraag 1a - 6 punten

$f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2x^2-3x-2)-(x^2+3x-10)(4x-3)}{(2x^2-3x-2)^2}$

$f'(0) = \dfrac{3 \cdot -2 - -10 \cdot -3}{(-2)^2} = \dfrac{-6-30}{4} = -9$

De vergelijking van de raaklijn in $(0,5)$ is dus $y = -9x + 5$

$x - 6y = 25 \Leftrightarrow y = \frac{1}{6}x - \frac{25}{6}$

Combineren geeft $-9x + 5 = \frac{1}{6}x - \frac{25}{6} \Leftrightarrow -54x + 30 = x - 25 \Leftrightarrow -55x = -55 \Leftrightarrow x = 1$

of $x - 6(-9x+5) = 25 \Leftrightarrow x + 54x - 30 = 25 \Leftrightarrow 55x = 55 \Leftrightarrow x = 1$

$x = 1$ geeft $y = -9 + 5 = -4$

Vraag 1b - 4 punten

$f(x) = 1 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 2x^2 - 3x - 2 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

Mag uiteraard ook met de abc-formule.

Echter, $f(2)$ bestaat niet, dus de enige oplossing is $x = 4$

Vraag 1c - 4 punten

In de perforatie geldt $x^2 - 7x + 12 = 0 \wedge x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 4$

$x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$

De *x*-coördinaat van de perforatie is dus $x = 3$

Je kunt ook de oplossingen van de eerste vergelijking in de tweede invullen of andersom

Voor $x \neq 3$ geldt $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-4)}{x^2(x-3)} = \dfrac{x-4}{x^2}$

De *y*-coördinaat van de perforatie is dus $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \frac{3-4}{3^2} = -\frac{1}{9}$

Vraag 1d - 7 punten

$h_a(x) = 5 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + a = 2$

Substitutie van $p = x^2$ geeft $p^2 - 4p + a = 2 \Leftrightarrow p^2 - 4p + a - 2 = 0$

De discriminant hiervan is $D = 16 - 4(a-2) = 16 - 4a + 8 = 24 - 4a$

Er zijn twee oplossingen voor p als $D > 0 \Leftrightarrow 24 - 4a > 0 \Leftrightarrow a < 6$

Er zijn 4 oplossingen voor x als de oplossingen voor p beide positief zijn

$\frac{4+\sqrt{24-4a}}{2}$ is altijd positief, $\frac{4-\sqrt{24-4a}}{2}$ is positief als $\sqrt{24-4a} < 4$,

dat is als $24 - 4a < 16 \Leftrightarrow -4a < -8 \Leftrightarrow a > 2$

Er zijn dus vier oplossingen als $2 < a < 6$

Vraag 2a - 6 punten

$f_p'(x) = (2x-2) \cdot \mathrm{e}^{x^2-2x} - \mathrm{e}^3 \cdot (2x-2)$

$f_p'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-2) \cdot \left(\mathrm{e}^{x^2-2x} - \mathrm{e}^3\right) = 0 \Leftrightarrow 2x-2 = 0 \vee \mathrm{e}^{x^2-2x} - \mathrm{e}^3 = 0$

$2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\mathrm{e}^{x^2-2x} - \mathrm{e}^3 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2-2x} = \mathrm{e}^3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

Mag uiteraard ook met de abc-formule.

$x = 1$ geeft $y = f_p(1) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^3 \cdot -1 = \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^3$

$x = -1$ en $x = 3$ geven $y = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^3 \cdot 3 = -2\mathrm{e}^3$

Vraag 2b - 2 punten

$f_p'(x) = (2x-2) \cdot \mathrm{e}^{x^2-2x} + p \cdot (2x-2)$

$f_p'(1) = (2-2) \cdot \mathrm{e}^{1-2} + p \cdot (2-2) = 0 + 0 = 0$

Vraag 2c - 4 punten

$f_p'(x) = (2x-2) \cdot \mathrm{e}^{x^2-2x} + p \cdot (2x-2)$

$f_p''(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{x^2-2x} + (2x-2) \cdot (2x-2) \cdot \mathrm{e}^{x^2-2x} + 2p$

Hieruit volgt $f_p''(1) = 2\mathrm{e}^{-1} + 0 \cdot \mathrm{e}^{-1} + 2p = 2\mathrm{e}^{-1} + 2p$

Dit geeft $f_p''(1) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{-1} + 2p = 0 \Leftrightarrow 2p = -2\mathrm{e}^{-1} \Leftrightarrow p = -\mathrm{e}^{-1}$

Opmerking: Punt P_p is in dit geval géén buigpunt!

Vraag 2d - 7 punten

Als de grafiek van f_p boven die van f_0 ligt, is de oppervlakte van *V* gelijk aan

$$\int_0^2 f_p(x) - f_0(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^2 p \cdot (x^2 - 2x)\ \mathrm{d}x = \left[p \cdot \left(\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right)\right]_0^2 = p \cdot \left(\tfrac{8}{3} - 4\right) - 0 = -\tfrac{4}{3}p$$

Dit moet gelijk zijn aan 4, dus volgt $-\frac{4}{3}p = 4 \Leftrightarrow p = 4 \cdot -\frac{3}{4} = -3$

Als de grafiek van f_p onder die van f_0 ligt, is de oppervlakte van *V* gelijk aan

$$\int_0^2 f_0(x) - f_p(x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^2 f_p(x) - f_0(x)\ \mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}p$$

Dit moet gelijk zijn aan 4, dus volgt $\frac{4}{3}p = 4 \Leftrightarrow p = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$

Berekeningen kunnen uiteraard ook in omgekeerde volgorde.

Kan ook in één keer met $\left|\int_0^2 f_p(x) - f_0(x)\ \mathrm{d}x\right| = 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}p = \pm 4 \Leftrightarrow p = \pm 3$

Vraag 3a - 5 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(2x^2 - x) = 2\ln(x-2) \Rightarrow \ln(2x^2 - 2) = \ln((x-2)^2)$

Dit geeft $2x^2 - x = (x-2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1$

Zowel $x = -4$ als $x = 1$ liggen niet in het domein van g, dus er zijn geen oplossingen

Vraag 3b - 4 punten

$f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(2x^2 - x) = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x = \mathrm{e} \Leftrightarrow 2x^2 - x - \mathrm{e} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 8\mathrm{e}}}{4}$

Dit geeft $d(P,Q) = |x_P - x_Q| = \frac{1+\sqrt{1+8\mathrm{e}}}{4} - \frac{1-\sqrt{1+8\mathrm{e}}}{4} = \frac{\sqrt{1+8\mathrm{e}}}{4} + \frac{\sqrt{1+8\mathrm{e}}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{1+8\mathrm{e}}$

Vraag 3c - 8 punten

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x = \mathrm{e}^0 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot -1}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

met als enige positieve oplossing $x = \frac{1+3}{4} = 1$, dus $x_A = 1$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = \mathrm{e}^0 = 1 \Leftrightarrow x = 3$, dus $x_M = x_B = 3$

$f'(x) = \dfrac{4x-1}{2x^2 - x} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{4-1}{2-1} = 3$

De lijn door *A* en *M* van staat loodrecht op de raaklijn aan de grafiek van f in *A* en heeft dus richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{3}$

Een vergelijking van de lijn door $A(1,0)$ en *M* is $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$,

dus $y_M = -\frac{1}{3}x_M + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

$d(A,M) = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{4\frac{4}{9}}$

Een vergelijking voor c_1 is dus $(x-3)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = 4\frac{4}{9}$

Vraag 3c - 5 punten

Volgens de omgekeerde stelling van Thales is OCD een rechthoekige driehoek met $\angle C = 90°$

$d(O,D) = 2r = 4\sqrt{5} = \sqrt{80}$; $d(O,C) = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Pythagoras geeft $d(C,D)^2 = d(O,D)^2 - d(O,C)^2 = 80 - 8 = 72$, dus $d(C,D) = \sqrt{72}$

De oppervlakte van driehoek *OCD* is $\frac{1}{2} \cdot d(O,C) \cdot d(C,D) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{72} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{576} = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$

Vraag 4a - 6 punten

$f'(x) = 2\cos\left(\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right) \cdot -\sin\left(\frac{1}{3}x\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}\cos\left(\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{2}{3} \cdot \cos\left(\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -\frac{2}{3} \cdot \cos(0) \cdot 1 = -\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{3}$

Vervolg met tangens:

De richtingscoëfficiënt van m is $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{5}{2}$

$\tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) \approx -33{,}7°$; $\tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 68{,}2°$

De hoek tussen l en m is dus $68{,}2° - -33{,}7° = 101{,}9°$

Dit komt overeen met een scherpe hoek van $78{,}1°$.

Vervolg met cosinus:

Een richtingsvector van lijn l is $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

De cosinus van de hoek tussen lijn l en lijn m is dus

$$\frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|6 - 10|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}206$$

De hoek tussen l en m is dus $\cos^{-1}(0{,}206) \approx 78{,}1°$

Vraag 4b - 7 punten

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -1 \Leftrightarrow \tan(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{4}\pi$

Te berekenen is dus

$$\pi \cdot \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\sin(x) + \cos(x))^2 \;\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) \;\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{\frac{3}{4}\pi} 1 + \sin(2x) \;\mathrm{d}x$$

$$= \pi \cdot \left[x - \frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} = \pi \cdot \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2} \cdot 0 - \left(0 - \frac{1}{2} \cdot 1\right)\right) = \pi \cdot \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right)$$

Vraag 4c - 6 punten

Met formule $\sin(A) = \cos\left(A - \frac{1}{2}\pi\right)$*:*

$\sin(3x) = \cos(5x) \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(5x)$

Dit geeft $3x - \frac{1}{2}\pi = 5x + k \cdot 2\pi$ of $3x - \frac{1}{2}\pi = -5x + k \cdot 2\pi$

$3x - \frac{1}{2}\pi = 5x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$3x - \frac{1}{2}\pi = -5x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 8x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$

Met formule $\sin(A) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)$*:*

$\sin(3x) = \cos(5x) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\pi - 3x\right) = \cos(5x)$

Dit geeft $\frac{1}{2}\pi - 3x = 5x + k \cdot 2\pi$ of $\frac{1}{2}\pi - 3x = -5x + k \cdot 2\pi$

$\frac{1}{2}\pi - 3x = 5x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -8x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$

$\frac{1}{2}\pi - 3x = -5x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

Met formule $\cos(A) = \sin\left(A + \frac{1}{2}\pi\right)$*:*

$\sin(3x) = \cos(5x) \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(5x + \frac{1}{2}\pi\right)$

Dit geeft $3x = 5x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \pi - (5x + \frac{1}{2}\pi) + k \cdot 2\pi$

$3x = 5x + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

$3x = \pi - \left(5x + \frac{1}{2}\pi\right) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 3x = \frac{1}{2}\pi - 5x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 8x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$

Met formule $\cos(A) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - A\right)$*:*

$\sin(3x) = \cos(5x) \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - 5x\right)$

Dit geeft $3x = \frac{1}{2}\pi - 5x + k \cdot 2\pi$ of $3x = \pi - \left(\frac{1}{2}\pi - 5x\right) + k \cdot 2\pi$

$3x = \frac{1}{2}\pi - 5x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 8x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$

$3x = \pi - \left(\frac{1}{2}\pi - 5x\right) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 3x = \frac{1}{2}\pi + 5x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

Oplossingen op het interval $0 \leq x \leq \pi$:

$x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$ geeft $x = \frac{3}{4}\pi$

$x = \frac{1}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{4}\pi$ geeft $x = \frac{1}{16}\pi$, $x = \frac{5}{16}\pi$, $x = \frac{9}{16}\pi$ en $x = \frac{13}{16}\pi$