

# CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

## Tentamen Wiskunde B

Datum: 22 april 2024  
Tijd: 13.30 – 16.30 uur  
Aantal opgaven: 4

**Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.**

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.

Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan.**

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:				
Opgave	1	2	3	4
a	5	5	5	6
b	6	4	6	5
c	8	6	7	6
d		7	5	
Totaal	19	22	23	17
Cijfer = $\frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$				
U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.				

## Opgave 1 – Twee logaritmische functies

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functie  $f$  wordt gegeven door  $f(x) = 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}x\right)$ .

De functie  $g$  wordt gegeven door  $g(x) = \ln(8 - x)$ .

- 5pt a Bereken exact de coördinaten van het (de) snijpunt(en) van de grafieken van  $f$  en  $g$ .

Punt  $A$  is het snijpunt van de grafiek van  $f$  en de  $x$ -as.

Lijn  $\ell$  is de raaklijn aan de grafiek van  $f$  in punt  $A$ .

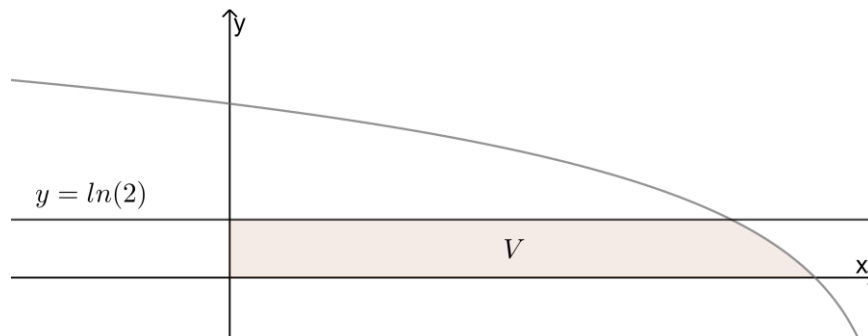
Punt  $B$  is het snijpunt van lijn  $\ell$  en de  $y$ -as.

Driehoek  $D$  is de driehoek met hoekpunten  $A$ ,  $B$  en  $O(0,0)$ .

- 6pt b Bereken exact de oppervlakte van driehoek  $D$ .

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie  $g$ .  $V$  is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van  $g$ , de  $x$ -as, de  $y$ -as en de horizontale lijn met vergelijking  $y = \ln(2)$ .

- 8pt c Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als  $V$  gewenteld wordt rond de  $y$ -as.



## Opgave 2 – Gebroken functies en functies met een wortel

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functie  $f_p$  wordt voor iedere waarde van  $p$  gegeven door

$$f_p(x) = \frac{4x + 1}{2x^2 + 2x + p}$$

- 5pt a Bereken exact de waarde(n) van  $p$  waarvoor de grafiek van  $f_p$  twee verticale asymptoten heeft.

Er is één waarde van  $p$  waarvoor de grafiek van  $f_p$  een maximum heeft in een punt op de  $y$ -as.

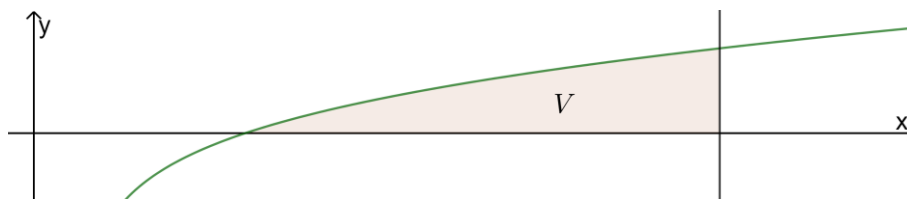
- 4pt b Bereken exact deze waarde van  $p$ .

De functie  $g$  wordt gegeven door  $g(x) = e^{-x} \cdot \sqrt{2x}$ .

- 6pt c Bereken exact de maximale waarde van  $g(x)$ .

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie  $h(x) = \sqrt{3x - 3} - \sqrt{2x + 1}$ .  $V$  is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van  $h$ , de  $x$ -as en de verticale lijn  $x = 13$ .

- 7pt d Bereken exact de oppervlakte van vlakdeel  $V$ .



### Opgave 3 – De baan van een bewegend punt

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De baan van een bewegend punt  $P(x, y)$  wordt voor elke positieve waarde van  $\alpha$  beschreven door

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin(t) \cos(\alpha t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Er zijn vier waarden van  $t$  in het interval  $0 \leq t \leq 2\pi$  waarvoor de baan van  $P$  de verticale lijn  $x = \frac{1}{2}$  snijdt.

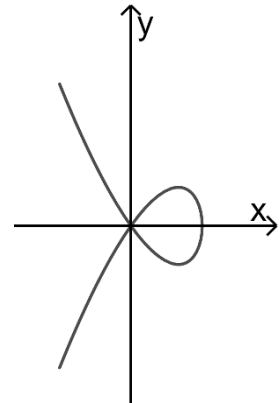
- 5pt a Bereken voor de grootste van deze vier waarden exact de waarden van  $\alpha$  waarvoor  $y(t) = 1$ .

Voor  $\alpha = 2$  wordt de baan van punt  $P$  beschreven door

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin(t) \cos(2t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Zie de figuur hiernaast.

- 6pt b Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de baan van  $P$  met de lijn met vergelijking  $y = x$ .



De baan van punt  $P$  in de figuur hiernaast heeft twee raaklijnen in de oorsprong  $O(0,0)$ .

- 7pt c Bereken exact een vergelijking voor één van deze twee raaklijnen.

We nemen nu  $\alpha = 1$ .

De baan van  $P$  wordt dan beschreven door

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin(t) \cos(t) \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- 5pt d Bereken exact voor welke waarden van  $t$  in het interval  $0 \leq t \leq 2\pi$  de baan van  $P$  en de lijn  $y = -x$  elkaar snijden.

## Opgave 4 – Drie cirkels

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Gegeven wordt de cirkel  $c_1$  met vergelijking  $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ .

Lijnen  $\ell$  en  $m$  zijn de raaklijnen aan cirkel  $c_1$  die door de oorsprong  $O(0,0)$  gaan.

6pt a Bereken algebraïsch de hoek tussen lijnen  $\ell$  en  $m$ .

Cirkel  $c_2$  heeft middelpunt  $M(12,6)$  en heeft geen snijpunten met de  $x$ -as.

De afstand tussen cirkel  $c_1$  en cirkel  $c_2$  is 5.

5pt b Bereken exact een vergelijking voor cirkel  $c_2$ .

Cirkel  $c_3$  gaat door de middelpunten van de cirkels  $c_1$  en  $c_2$ .

Het middelpunt van cirkel  $c_3$  ligt op de lijn met vergelijking  $y = x + 2$ .

6pt c Bereken exact de straal van cirkel  $c_3$ .

*Einde van het tentamen.*

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*

*Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.*

*Wat er **niet** in het mapje moet:*

- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;*
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;*
- kladpapier;*
- deze opgaven.*

*Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.*

*Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).*

## Formulelijst wiskunde B

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$