Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 22 april-2024

Vraag 1a - 5 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{1}{2}x\right) = \ln(8-x) \Rightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{2}x\right)^2\right) = \ln\,(8-x)$

Dit geeft $\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 8 - x \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = 8 - x \Leftrightarrow x^2 = 32 - 4x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 = 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -8$

$x = 4$ geeft $y = f(4) = 2\ln(2)$ $(= g(4) = \ln(4))$

$x = -8$ valt buiten het domein van f en is dus geen oplossing van $f(x) = g(x)$

Vraag 1b - 6 punten

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 1 \Leftrightarrow x = 2$. A is dus het punt $(2{,}0)$.

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x}$ geeft $f'(2) = 1$. De vergelijking van lijn ℓ is dan $y = x - 2$. B is dus het punt $(0, -2)$.

De oppervlakte van driehoek D is zodoende $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

Vraag 1c - 8 punten

$y = \ln(8-x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^y = 8 - x \Leftrightarrow x = 8 - \mathrm{e}^y$. Dit geeft $x^2 = 64 - 16\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{2y}$

Een primitieve hiervan is $64y - 16\mathrm{e}^y + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}$

De inhoud van *V* is zodoende

$\pi \cdot \int_0^{\ln(2)} x^2\,\mathrm{d}y = \pi \cdot \left[\,64y - 16\mathrm{e}^y + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\right]_0^{\ln(2)} = \pi \cdot \left(\left(64\ln(2) - 16\mathrm{e}^{\ln(2)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\ln(2)}\right) - \left(0 - 16 + \frac{1}{2}\right)\right)$

$= \pi \cdot \left(64\ln(2) - 16 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 + 16 - \frac{1}{2}\right) = \pi \cdot \left(64\ln(2) - 14\frac{1}{2}\right)$

Vraag 2a - 5 punten

Bij een verticale asymptoot geldt: $2x^2 + 2x + p = 0$ en $4x + 1 \neq 0$

$2x^2 + 2x + p = 0$ heeft twee oplossingen als $D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot p > 0 \Leftrightarrow 4 - 8p > 0 \Leftrightarrow 4 > 8p \Leftrightarrow p < \frac{1}{2}$

Echter, als één van deze oplossingen $x = -\frac{1}{4}$ is, heeft f_p maar één verticale asymptoot.

Dit is het geval als $2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + p = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{3}{8}$

Er zijn dus twee verticale asymptoten als $p < \frac{1}{2}$ en $p \neq \frac{3}{8}$

Vraag 2b - 4 punten

$$f_p'(x) = \frac{4(2x^2 + 2x + p) - (4x+1)(4x+2)}{(2x^2 + 2x + p)^2}$$

$$f_p'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(0 + 0 + p) - (0+1)(0+2)}{(0 + 0 + p)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{4p - 2}{p^2} = 0 \Leftrightarrow 4p - 2 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$$

Vraag 2c - 6 punten

$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \cdot \sqrt{2x} + \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \left(-\sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} \cdot \left(-\sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}\right) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}} = 0$$

$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{2x}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Maximumwaarde: $g\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

Vraag 2d - 7 punten

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x-3} = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 3x - 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 4$

Te berekenen is dus

$\int_4^{13} h(x)\ \mathrm{d}x = \int_4^{13} (3x-3)^{\frac{1}{2}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot(3x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(2x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_4^{13}$

$= \left(\frac{2}{9}\cdot 36^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot 27^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{9}\cdot 9^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right) \ldots = \frac{2}{9}\cdot 216 - \frac{1}{3}\cdot 27^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}\cdot 27 + \frac{1}{3}\cdot 27 = 48 - \frac{1}{3}\cdot 27^{\frac{3}{2}} - 6 + 9$

$= 51 - \frac{1}{3}\cdot 27^{\frac{3}{2}}\quad \left(= 51 - \frac{1}{3}\cdot 27\sqrt{27} = 51 - 9\sqrt{27} = 51 - 9\cdot 3\sqrt{3} = 51 - 27\sqrt{3}\right)$

Vraag 3a - 5 punten

$x(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2t = \pm\frac{1}{3}\pi k + 2\pi \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{6}\pi + k\cdot\pi$

De grootste oplossing op het interval $0 \le t \le 2\pi$ is $t = 1\frac{5}{6}\pi$

$y\left(1\frac{5}{6}\pi\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(1\frac{5}{6}\pi\right)\cos\left(\alpha\cdot 1\frac{5}{6}\pi\right) = 1 \Leftrightarrow 2\cdot -\frac{1}{2}\cdot\cos\left(\alpha\cdot 1\frac{5}{6}\pi\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\alpha\cdot 1\frac{5}{6}\pi\right) = -1$

Dit geeft $\alpha\cdot\frac{11}{6}\pi = \pi + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{6}{11} + k\cdot\frac{12}{11}$

Vraag 3b - 6 punten

$x(t) = y(t) \Leftrightarrow \cos(2t) = 2\sin(t)\cos(2t) \Leftrightarrow \cos(2t) = 0 \vee 2\sin(t) = 1$

$\cos(2t) = 0$ geeft $y(t) = 0$, dus het eerste snijpunt is $O(0,0)$

$2\sin(t) = 1 \Leftrightarrow \sin(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}\pi \vee t = \frac{5}{6}\pi$

$t = \frac{1}{6}\pi$ geeft $x(t) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$, dus het tweede snijpunt is $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$t = \frac{5}{6}\pi$ geeft $x(t) = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$, dit geeft ook het snijpunt $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Vraag 3c - 7 punten

$x(t) = 0 \wedge y(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(2t) = 0$. Dit geeft onder meer $2t = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}\pi$

$x'(t) = -2\sin(2t)$, dus $x'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = -2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -2\cdot 1 = -2$

$y'(t) = 2\cos(t)\cos(2t) - 4\sin(t)\sin(2t)$, dus $y'\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 0 - 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1 = -2\sqrt{2}$

Dit geeft $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{-2\sqrt{2}}{-2} = \sqrt{2}$. De vergelijking van de raaklijn is zodoende $y = x\cdot\sqrt{2}$

Andere oplossingen: $t = \frac{3}{4}\pi$ *met* $\frac{y'(t)}{x'(t)} = \sqrt{2}$ *en* $t = \frac{5}{4}\pi \vee t = \frac{7}{4}\pi$ *met* $\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\sqrt{2}$

Vraag 3d - 5 punten

$y(t) = -x(t) \Leftrightarrow 2\sin(t)\cos(t) = -\cos(2t) \Leftrightarrow \sin(2t) = -\cos(2t) \Leftrightarrow \cos\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right) = \cos(2t - \pi)$

Dit geeft $2t - \frac{1}{2}\pi = \pi - 2t + k\cdot 2\pi$ ($2t - \frac{1}{2}\pi = 2t - \pi$ heeft geen oplossingen)

... $\Leftrightarrow 4t = \frac{3}{2}\pi + k\cdot 2\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{8}\pi + k\cdot\frac{1}{2}\pi$

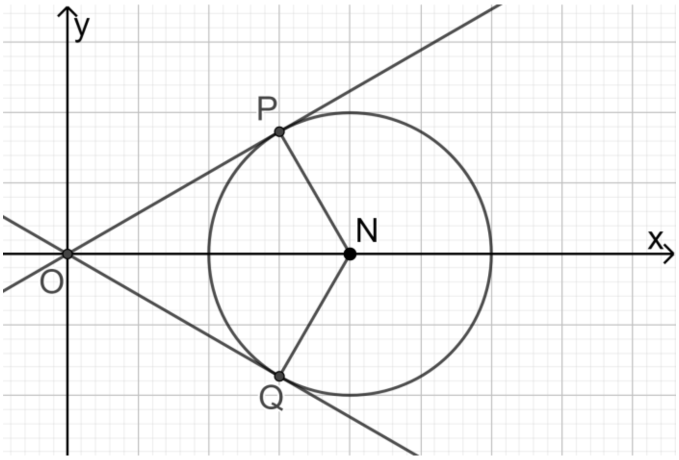
Oplossingen op het interval $0 \le t \le 2\pi$: $t = \frac{3}{8}\pi$, $t = \frac{7}{8}\pi$, $t = 1\frac{3}{8}\pi$ en $t = 1\frac{7}{8}\pi$

Alternatief:

$y(t) = -x(t) \Leftrightarrow 2\sin(t)\cos(t) = -\cos(2t) \Leftrightarrow \sin(2t) = -\cos(2t) \Leftrightarrow \tan(2t) = -1$

Dit geeft $2t = \frac{3}{4}\pi + k\cdot\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{8}\pi + k\cdot\frac{1}{2}\pi$ met dezelfde oplossingen als hierboven

Vraag 4a - 6 punten



In de figuur hierboven is N het middelpunt van c_1 en zijn OP en OQ de raaklijnen aan c_1 vanuit de oorsprong.

Eenvoudigste oplossing:

OP en OQ zijn raaklijnen aan c_1 dus $\angle OPN = \angle OQN = 90°$

N is het punt $(4{,}0)$, dus $|ON| = 4$

PN en QN zijn straal van c_1, dus $|PN| = |QN| = 2$

$\sin(\angle PON) = \frac{|PN|}{|ON|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ en/of $\sin(\angle QON) = \frac{|QN|}{|ON|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Dit geeft $\angle PON = 30° = \frac{1}{6}\pi$ en/of $\angle QON = 30° = \frac{1}{6}\pi$

Dus $\angle QOP = \angle PON + \angle QON = 2\angle PON = 2\angle QON = 60° = \frac{1}{3}\pi$

Alternatief 1 (erg moeilijke, maar niet onmogelijke oplossing):

$(x-4)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 - (x-4)^2 = -x^2 + 8x - 12$

De bovenste helft van de cirkel wordt dus gegeven door $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}$

$$f'(x) = \frac{-2x+8}{2\sqrt{-x^2+8x-12}} = \frac{4-x}{\sqrt{-x^2+8x-12}}$$

De lijn door *O* en *P* heeft dus vergelijking $y = \frac{4-x_P}{\sqrt{-x_P^2+8x_p-12}} \cdot x$

Dit geeft $y_P = \frac{4x_P - x_P^2}{\sqrt{-x_P^2+8x_P-12}}$

$(x_P - 4)^2 + y_P^2 = 4$ geeft dan $x_P^2 - 8x_P + 16 + \frac{(4x_P - x_P^2)^2}{-x_P^2+8x_P-12} = 4 \Leftrightarrow (4x_P - x_P^2)^2 = (x_P^2 - 8x_P + 12)^2$

Hieruit volgt $4x_P - x_P^2 = x_P^2 - 8x_P + 12 \Leftrightarrow 2x_P^2 - 12x_P + 12 = 0 \Leftrightarrow x_P = 3 \pm \sqrt{3}$

of $x_P^2 - 4x_P = x_P^2 - 8x_P + 12 \Leftrightarrow 4x_P = 12 \Leftrightarrow x_P = 3$

Invullen in de formule voor y_P laat zien dat de eerste twee oplossingen niet voldoen
en dat voor $x_P = 3$ geldt $y_P = \frac{3}{\sqrt{3}}$

De hoek tussen *ℓ* en de *x*-as is zodoende $\tan^{-1}\left(\frac{y_P}{x_P}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

De hoek tussen *m* en de *x*-as is even groot (*met symmetrie of met* $f(x) = -\sqrt{-x^2+8x-12}$)

De hoek tussen *ℓ* en *m* is dus $60°$ $\left(= \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}0472 \text{ rad}\right)$

Alternatief 2 (met richtingsvectoren):

Een richtingsvector van OP is $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$. N is het punt $(4{,}0)$, dus een richtingsvector van PN is $\begin{pmatrix} x_P - 4 \\ y_P \end{pmatrix}$

Omdat OP raaklijn is aan de cirkel, moet het inproduct van deze vectoren 0 zijn

Dit geeft $x_P(x_P - 4) + y_P^2 = 0 \Leftrightarrow y_P^2 = -x_P(x_P - 4) = -x_P^2 + 4x_P$

PN is een straal van c_1 dus $|PN|^2 = \left(x_p - 4\right)^2 + y_P^2 = 4 \Leftrightarrow y_P^2 = 4 - (x_P - 4)^2 = -x_P^2 + 8x_P - 12$

Samen geeft dit: $-x_P^2 + 4x_P = -x_P^2 + 8x_P - 12 \Leftrightarrow -4x_P = -12 \Leftrightarrow x_P = 3$

Hieruit volgt $y_P^2 = 3$, dus $y_P = \sqrt{3}$ (en $y_Q = -\sqrt{3}$)

De hoek tussen ℓ en *m* is zodoende $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Dit is gelijk aan $30° - (-30°) = 60°$ $\left(= \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}0472 \text{ rad}\right)$

Alternatief 3 (met de afstandsformule):

De lijnen ℓ en *m* hebben een vergelijking van de vorm $y = ax \Leftrightarrow ax - y = 0$

De afstand tussen deze lijn en punt $N(4{,}0)$ is $\frac{|a \cdot 4 - 1 \cdot 0 - 0|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{|4a|}{\sqrt{a^2+1}}$

Dit moet gelijk zijn aan de straal van c_1, dus $\frac{|4a|}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \Leftrightarrow \frac{16a^2}{a^2+1} = 4$

Dit geeft $16a^2 = 4a^2 + 4 \Leftrightarrow 12a^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{1}{3}} \vee a = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

De hoek tussen ℓ en *m* is zodoende $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - \tan^{-1}\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

Dit is gelijk aan $30° - (-30°) = 60°$ $\left(= \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}0472 \text{ rad}\right)$

Alternatief 4 (met invullen van y = ax in de vergelijking van de cirkel):

Een rechte lijn door de oorsprong heeft een vergelijking van de vorm $y = ax$

Voor de gemeenschappelijke punten met cirkel c_1 geldt dus $(x-4)^2 + (ax)^2 = 4$

De lijn raakt cirkel c_1 als deze vergelijking precies één oplossing heeft

$(x-4)^2 + (ax)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + a^2x^2 = 4 \Leftrightarrow (1 + a^2)x^2 - 8x + 12 = 0$

$D = 8^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 12 = 64 - 48 - 48a^2 = 16 - 48a^2$

$D = 0 \Leftrightarrow 48a^2 = 16 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \vee a = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$

De hoek tussen ℓ en *m* is zodoende $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - \tan^{-1}\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$t

Dit is gelijk aan $30° - (-30°) = 60°$ $\left(= \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}0472 \text{ rad}\right)$

In de alternatieven kan de hoek tussen ℓ en m ook berekend worden met

$$\cos^{-1}\left(\frac{\left(\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 1\end{pmatrix}\right)}{\sqrt{\frac{1}{3}+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}+1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{3}+1}{\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2/3}{4/3}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60° = \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}0472 \text{ rad}$$

Vraag 4b - 5 punten

Het middelpunt van cirkel c_1 is $N(4{,}0)$

$d(M,N) = \sqrt{(12-4)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

$d(c_1, c_2) = d(M,N) - straal\ c_1 - straal\ c_2$

Dit geeft $straal\ c_2 = d(M.N) - straal\ c_1 - d(c_1, c_2) = 10 - 2 - 5 = 3$

De vergelijking voor cirkel c_2 is dus $(x-12)^2 + (y-6)^2 = 9$

Vraag 4c - 6 punten

Het middelpunt van cirkel c_1 is $N(4{,}0)$

Voor het middelpunt P van cirkel c_3 geldt: $y_P = x_P + 2$

Er moet gelden: $d(P,M) = d(P,N)$

Dit geeft samen $(12-x_P)^2 + \left(6-(x_P+2)\right)^2 = (4-x_P)^2 + \left(0-(x_P+2)\right)^2$

$\Leftrightarrow (12-x_P)^2 + (4-x_P)^2 = (4-x_P)^2 + (x_P+2)^2 \Leftrightarrow (12-x_P)^2 = (x_P+2)^2$

$\Leftrightarrow 144 - 24x_P + x_P^2 = x_P^2 + 4x_P + 4 \Leftrightarrow 28x_P = 140 \Leftrightarrow x_P = 5$

$x_P = 5$ invullen in $(12-x_P)^2 + \left(6-(x_P+2)\right)^2$ geeft $\left(d(P,M)\right)^2 = 7^2 + (-1)^2 = 50$,
dus $r_{c_3} = d(P,M) = \sqrt{50}$ $\left(= 5\sqrt{2}\right)$

Kan ook met $\left(d(P,N)\right)^2 = (-1)^2 + (-7)^2 = 50$

Alternatief:

Het middelpunt van c_3 is het snijpunt van de middelloodlijn van *MN* en de lijn $y = x + 2$

De richtingscoëfficiënt van *MN* is $\frac{6-0}{12-4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ en het midden van *MN* is $Q(8{,}3)$

De middelloodlijn van *MN* heeft dus vergelijking $y - 3 = -\frac{4}{3}(x-8) \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{41}{3}$

$-\frac{4}{3}x + \frac{41}{3} = x + 2 \Leftrightarrow -\frac{7}{3}x = -\frac{35}{3} \Leftrightarrow x = 5$

Dit geeft $x_P = 5$, $y_P = 7$ en $r_{c_3} = d(P,N) = \sqrt{(4-5)^2 + (0-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$ $\left(= 5\sqrt{2}\right)$

Kan ook met $d(P,M) = \sqrt{(12-5)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Opmerking:
Uit het antwoord van vraag 4c volgt dat MPN een gelijkbenige rechthoekige driehoek is.
Dit is echter niet gegeven en mag daarom ook niet als uitgangspunt voor de berekening van r_{c_3} genomen worden.

