

CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde B

Datum: 19 december 2023

Tijd: 13.30 – 16.30 uur

Aantal opgaven: 4

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.

Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan.**

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:				
Opgave	1	2	3	4
a	4	4	5	6
b	5	5	3	6
c	5	8	5	4
d	7	8	6	
Totaal	21	25	19	16
Cijfer = $\frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$				
U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.				

Opgave 1 – Gemengde functies

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Voor iedere positieve waarde van p worden de functies f_p en F_p gegeven door

$$f_p(x) = \ln(px) \quad \text{en} \quad F_p(x) = x \cdot (f_p(x) - 1)$$

De functie F_p is een primitieve van f_p voor iedere waarde van p .

4pt a Toon dit aan.

Voor iedere positieve waarde van q wordt de functie g_q gegeven door

$$g_q(x) = x^q - \ln(x)$$

Er is één waarde van q waarvoor de grafiek van g_q door het punt $A\left(\sqrt{e}, 3\frac{1}{2}\right)$ gaat.

5pt b Bereken deze waarde van q exact en schrijf het antwoord in de vorm $q = \ln(a)$, met a een reëel getal.

5pt c Bereken exact een vergelijking voor de raaklijn aan de grafiek van de functie $g_4(x) = x^4 - \ln(x)$ in het punt op deze grafiek waarvoor $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

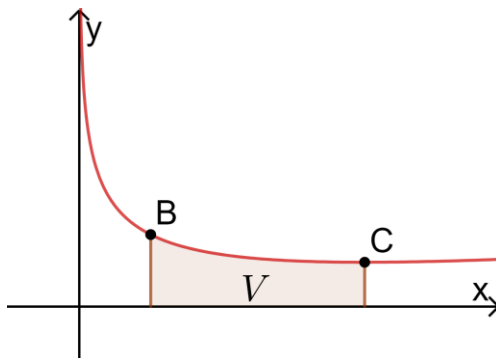
In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie $g_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x} - \ln(x)$.

Punt B is het punt op de grafiek van $g_{\frac{1}{2}}$ met $x_B = 1$.

Punt C is het punt op de grafiek van $g_{\frac{1}{2}}$ waar deze functie een minimum heeft.

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van $g_{\frac{1}{2}}$, de x -as en de verticale lijnen $x = x_B$ en $x = x_C$.

7pt d Bereken exact de oppervlakte van vlakdeel V .
Hint: gebruik het resultaat van vraag a met $p = 1$.



Opgave 2 – Een familie rationale functies en drie cirkels

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Voor iedere waarde van p wordt de functie f_p gegeven door

$$f_p(x) = \frac{2x^2 + 9x + p}{x + 3}$$

4pt a Bereken exact de waarde(n) van p waarvoor de grafiek van f_p één of meer asymptoten heeft.

5pt b Bereken exact de waarde(n) van p waarvoor de grafiek van f_p twee snijpunten heeft met de horizontale lijn $y = 1$.

Cirkel c_1 raakt de grafiek van $f_{25}(x) = \frac{2x^2 + 9x + 25}{x + 3}$ in het punt $A(1,9)$.

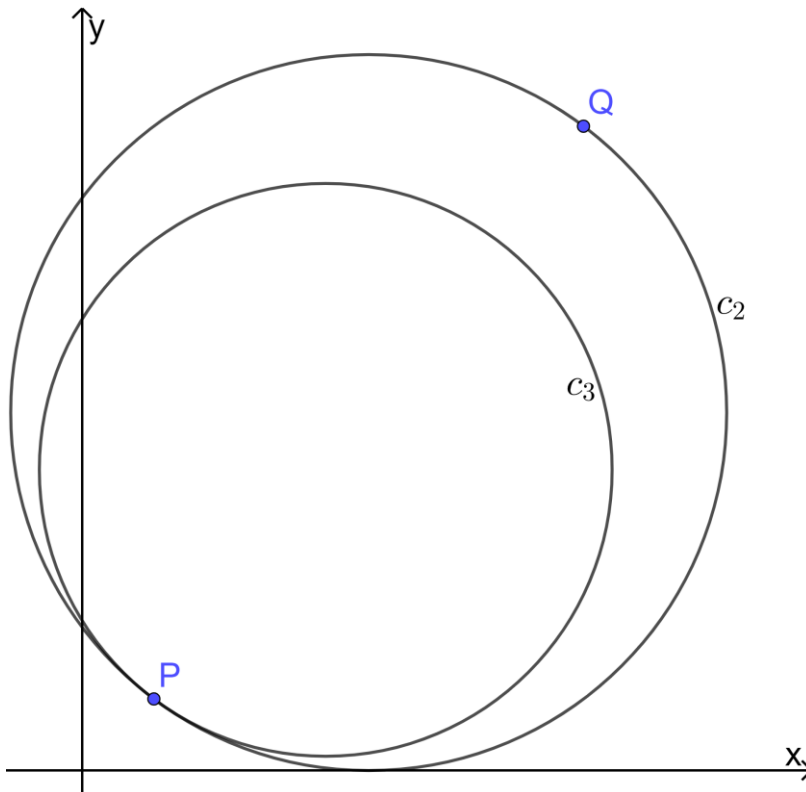
Het middelpunt M van c_1 ligt op de lijn met vergelijking $y = 2x + 1$.

8pt c Bereken exact een vergelijking voor cirkel c_1 .

In de figuur hieronder ziet u de punten $P(1,1)$ en $Q(7,9)$ en de cirkels c_2 en c_3 .

PQ is een middellijn van cirkel c_2 . Cirkel c_3 raakt cirkel c_2 in punt P . De oppervlakte van cirkel c_3 is 64% van de oppervlakte van cirkel c_2 .

8pt d Bereken exact een vergelijking voor cirkel c_3 .



Opgave 3 – Drie goniometrische functies

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \cos\left(\frac{1}{4}x\right) + \sin\left(\frac{1}{4}x\right)$.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = 1 + \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

De kleinste waarde van x in het interval $0 \leq x \leq 16\pi$ waarvoor $f(x) = 0$ is $x = 3\pi$.

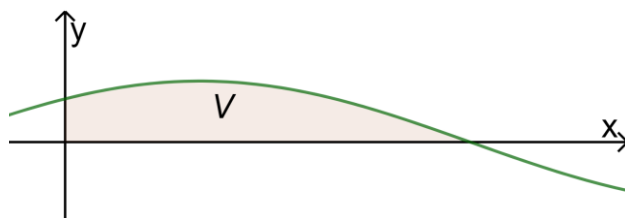
- 5pt a Bereken exact alle oplossingen van de vergelijking $f(x) = 0$ in het interval $0 \leq x \leq 16\pi$ en toon zo aan dat $x = 3\pi$ inderdaad de kleinste waarde van x in dit interval is waarvoor $f(x) = 0$.

Voor alle waarden van x geldt: $g(x) = (f(x))^2$.

- 3pt b Toon dit met een exacte berekening aan.

In de figuur hieronder ziet u een deel van de grafiek van de functie f .

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de x -as, de y -as en dit deel van de grafiek van f .



- 5pt c Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V rond de x -as gewenteld wordt.

Voor $x \geq 0$ wordt de functie h gegeven door $h(x) = \cos(\sqrt{x})$.

Lijn ℓ is de raaklijn aan de grafiek van h in het punt $A\left(\frac{1}{4}\pi^2, 0\right)$.

Punt B is het snijpunt van lijn ℓ en de y -as.

Driehoek D is de driehoek met hoekpunten A , B en $O(0,0)$.

- 6pt d Bereken exact de oppervlakte van driehoek D .

Opgave 4 – Vier exponentiële functies

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 4e^{-x^2+4x-4}$.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = 2e^{3x+3} - 3e^{2x+2}$.

De grafiek van f heeft twee buigpunten.

- 6pt a Bereken exact de x -coördinaten van deze twee buigpunten van de grafiek van f .

De functies f en g hebben beide één extreme waarde.

Punt A is het punt op de grafiek van f waarvoor $f(x)$ maximaal is.

Punt B is het punt op de grafiek van g waarvoor $g(x)$ minimaal is.

- 6pt b Bepaal met een exacte berekening een vectorvoorstelling voor de rechte lijn door de punten A en B .

De functie h wordt gegeven door $h(x) = 2^x$.

De functie k wordt gegeven door $k(x) = 3^x$.

Lijn l is de raaklijn aan de grafiek van h in het punt $(3,8)$.

Lijn m is de raaklijn aan de grafiek van k in het punt $(2,9)$.

- 4pt c Bereken algebraïsch de hoek tussen lijn l en lijn m .
Geef uw antwoord in graden, afgerond op één cijfer achter de decimale komma.

Einde van het tentamen.

Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of uw naam en het opgavenummer op ieder antwoordblad staat.

Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

Wat er niet in het mapje moet:

- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;*
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;*
- kladpapier;*
- deze opgaven.*

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst wiskunde B

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$