

CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde B

Datum: 23 juli 2022
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 4

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.

Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan.**

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:				
Opgave	1	2	3	4
a	5	6	3	5
b	5	7	6	8
c	8	5	6	6
d		5	6	
Totaal	18	23	21	19
Cijfer = $\frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$				
U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.				

Opgave 1 – Een gebroken functie en een familie parabolen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \frac{8}{x^2}$.

De familie functies g_a wordt gegeven door $g_a(x) = a - \frac{1}{2}x^2$.

- 5pt a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de grafiek van $g_5(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$.

Voor iedere $p > 0$ wordt gegeven de verticale lijn ℓ_p met vergelijking $x = p$.

F_p is het snijpunt van ℓ_p en de grafiek van f .

G_p is het snijpunt van ℓ_p en de grafiek van $g_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

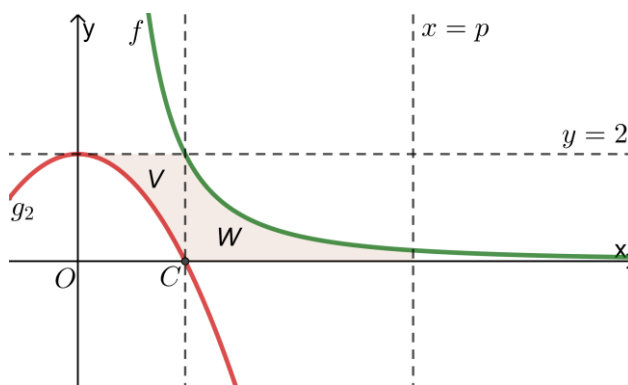
- 5pt b Bereken exact de waarde van p waarvoor de afstand tussen F_p en G_p minimaal is.

In de figuur hieronder ziet u de grafieken van f en van de functie $g_2(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$.

C is het snijpunt van de grafiek van g_2 en de positieve x -as.

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van g_2 , de horizontale lijn $y = 2$ en de verticale lijn door C .

W is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van f , de verticale lijn door C , de x -as en de lijn ℓ_p met vergelijking $x = p$ met $p > x_C$.



Er is een waarde van p waarvoor de oppervlakte van V precies half zo groot is als de oppervlakte van W .

- 8pt c Bereken deze waarde van p exact.

Opgave 2 – Exponentiële en logaritmische functies

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

De grafiek van f heeft één buigpunt.

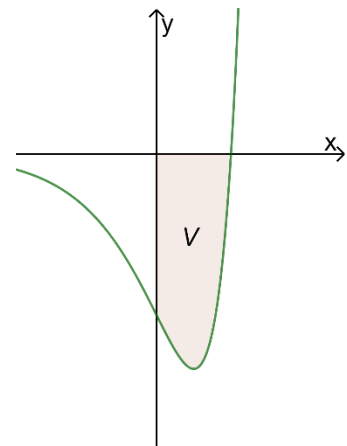
6pt a Bereken exact de coördinaten van dit punt.

Hiernaast ziet u de grafiek van de functie

$$g(x) = e^x \cdot (e^x - 4)$$

V is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de x -as, de y -as en de grafiek van g .

7pt b Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V rond de x -as gewenteld wordt.



De functie h wordt gegeven door

$$h(x) = \ln(x + 2) + \frac{1}{3}\ln(x^3)$$

5pt c Bereken exact de coördinaten van het/de snijpunt(en) van de grafiek van h en de lijn met vergelijking $y = \ln(8)$.

Voor iedere reële waarde van p wordt de functie k_p gegeven door

$$k_p(x) = \ln(px^2 - px + 1)$$

5pt d Bereken exact de waarde van p waarvoor de raaklijn aan de grafiek van k_p in $O(0,0)$ door het punt $A(1,2)$ gaat.

Opgave 3 – Een goniometrische functie en een driehoek

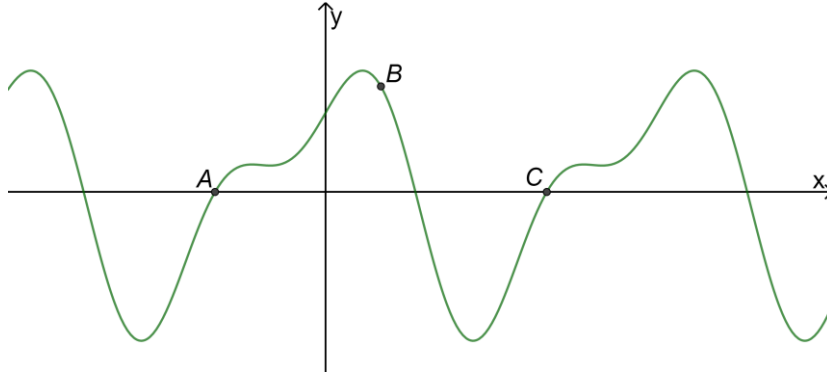
Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie

$$f(x) = 2 \cos(x) + \sin\left(2x - \frac{1}{6}\pi\right)$$

De punten $A\left(-\frac{2}{3}\pi, 0\right)$, $B\left(\frac{1}{3}\pi, 2\right)$ en $C\left(\frac{4}{3}\pi, 0\right)$ liggen alle op de grafiek van f .

Dit hoeft u niet aan te tonen.



De afgeleide functie van f kan geschreven worden als

$$f'(x) = -2 \sin(x) + 2 \sin\left(2x + \frac{1}{3}\pi\right)$$

- 3pt a Toon dit met een exacte berekening aan.
- 6pt b Bereken exact de x -coördinaten van de punten op de grafiek van f in het interval $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ waarin de raaklijn aan deze grafiek horizontaal loopt.

Lijn m is de raaklijn aan de grafiek van f in punt A .

Lijn n is de raaklijn aan de grafiek van f in punt B .

Punt D is het snijpunt van m en n .

Punt E is het snijpunt van n met de x -as.

- 6pt c Toon met een exacte berekening aan dat driehoek ADE gelijkzijdig is.

De grafiek van f en de x -as sluiten twee types vlakdelen in: vlakdelen onder de x -as en vlakdelen boven de x -as.

- 6pt d Onderzoek met een exacte berekening of de oppervlaktes van deze types vlakdelen gelijk zijn.

Opgave 4 – Een gebroken functie en twee cirkels

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{8x - 12}{6x^2 - 17x + 12}$$

De grafiek van deze functie heeft twee asymptoten.

- 5pt a Bepaal met een exacte berekening een vergelijking voor elk van deze asymptoten.

Cirkel c_1 raakt aan de grafiek van f in het snijpunt van deze grafiek met de y -as. Het middelpunt van cirkel c_1 ligt op de lijn met vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 8pt b Bepaal met een exacte berekening een vergelijking voor cirkel c_1 .

Cirkel c_2 wordt gegeven door de vergelijking

$$x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0$$

A en B zijn twee punten op deze cirkel. De raaklijnen aan de cirkel in deze twee punten snijden elkaar onder een hoek van 30° .

- 6pt c Bereken algebraïsch de afstand tussen de punten A en B . Rond uw antwoord af op twee cijfers achter de komma.

Einde van het tentamen.

Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of uw naam en het opgavenummer op ieder antwoordblad staat.

Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

Wat er niet in het mapje moet:

- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;*
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;*
- kladpapier;*
- deze opgaven.*

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst wiskunde B

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$