

# CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

## Tentamen Wiskunde B

Datum: 22 april 2022  
Tijd: 13.30 – 16.30 uur  
Aantal opgaven: 4

**Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.**

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend.

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.

Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan.**

Op de laatste bladzijde van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

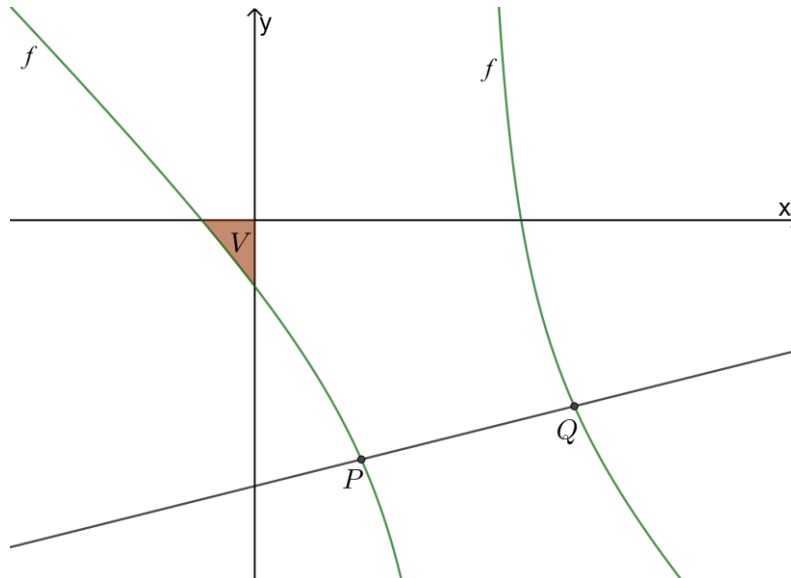
Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:				
Opgave	1	2	3	4
a	6	6	6	6
b	3	6	7	6
c	7	5	7	7
d	5	4		
Totaal	21	21	20	19
Cijfer = $\frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$				
U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.				

## Opgave 1 – Gebroken functies

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie  $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{4 - x}$ .



$P$  en  $Q$  zijn de punten op de grafiek van  $f$  met respectievelijk  $x_P = 2$  en  $x_Q = 6$ .

$\ell$  is de rechte lijn die de grafiek van  $f$  snijdt in de punten  $P$  en  $Q$ .

- 6pt a Onderzoek met een exacte berekening of lijn  $\ell$  de grafiek van  $f$  loodrecht snijdt in punt  $P$ .

Het functievoorschrift van  $f$  is te herleiden tot  $f(x) = -x + \frac{5}{x-4}$ .

- 3pt b Toon dit aan.

$V$  is het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van  $f$ , de  $x$ -as en de  $y$ -as. Dit vlakdeel is gekleurd weergegeven in de figuur hierboven.

- 7pt c Bereken exact de oppervlakte van vlakdeel  $V$ .

Gegeven wordt nu de familie functies  $g_a(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{a - x}$ .

Voor  $a = 4$  is dit precies de hierboven gegeven functie  $f$ . De grafiek van deze functie heeft een scheve asymptoot en een verticale asymptoot. Er zijn echter waarden van  $a$  waarvoor de grafiek van  $g_a$  geen asymptoten heeft.

- 5pt d Bereken exact deze waarden van  $a$  en teken voor de kleinste van deze waarden van  $a$  de grafiek van  $g_a$ .

## Opgave 2 – De baan van een bewegend punt

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

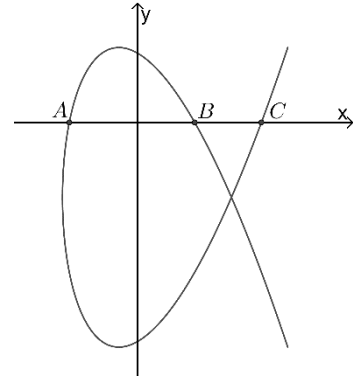
De baan van een bewegend punt  $P(x, y)$  wordt voor elke waarde van  $p$  en  $q$  beschreven door

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 3 \sin^2(t) \\ y(t) = p \cdot \cos(qt) - 1 \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Voor  $p = 2$  en  $q = 3$  wordt de baan van punt  $P$  beschreven

door 
$$\begin{cases} x(t) = 2 - 3 \sin^2(t) \\ y(t) = 2 \cos(3t) - 1 \end{cases}$$

Deze baan snijdt de  $x$ -as in drie punten,  $A$ ,  $B$  en  $C$ , zie de figuur hiernaast.



- 6pt a Bereken voor elk van deze drie punten exact de bijbehorende waarden van  $t$  in het interval  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

De baan van punt  $P$  heeft punten waarin de raaklijn aan de baan evenwijdig is met de  $x$ -as.

- 6pt b Bereken exact de coördinaten van deze punten.

We nemen nu  $p = \frac{3}{2}$  en  $q = 1$ .

De baan van  $P$  wordt zodoende beschreven door

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 3 \sin^2(t) \\ y(t) = \frac{3}{2} \cos(t) - 1 \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

- 5pt c Bereken exact voor welke waarden van  $t$  in het interval  $0 \leq t \leq 2\pi$  de baan van  $P$  en de lijn  $y = x$  elkaar snijden.

Ten slotte nemen we  $p = 2$  en  $q = 2$ .

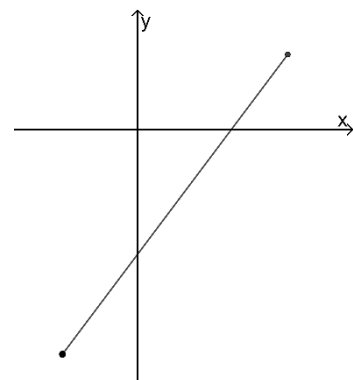
De baan van  $P$  wordt dan beschreven door

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 3 \sin^2(t) \\ y(t) = 2 \cos(2t) - 1 \end{cases} \text{ met } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

De baan van  $P$  is in dit geval het lijnstuk dat u ziet in de figuur hiernaast.

De lijn  $m$  waarop dit lijnstuk ligt heeft als vergelijking

$$y = \frac{4}{3}x - 1\frac{2}{3}.$$



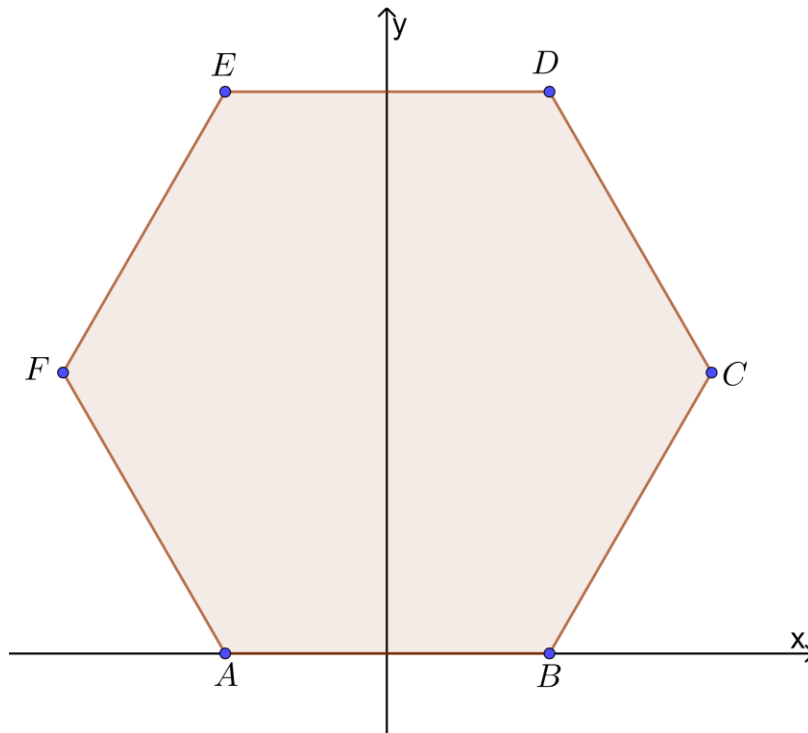
- 4pt d Toon aan dat alle punten van  $P$  op lijn  $m$  liggen.

### Opgave 3 – Een regelmatige zeshoek en een cirkel

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een regelmatige zeshoek is een zeshoek waarvan alle zijden dezelfde lengte hebben en alle hoeken gelijk zijn aan  $120^\circ$ .

In de figuur hieronder ziet u de punten  $A(-3,0)$  en  $B(3,0)$ , die samen met de punten  $C, D, E$  en  $F$  een regelmatige zeshoek vormen.



Punt  $C$  heeft coördinaten  $(6, 3\sqrt{3})$ .

6pt a Toon dit aan met een exacte berekening.

Punt  $R$  is het midden van de zijde  $EF$ .

7pt b Bereken algebraïsch de hoek die de lijn door  $R$  en  $B$  maakt met de  $y$ -as. Geef uw antwoord afgerond op hele graden.

Voor iedere waarde van  $p$  wordt de lijn  $\ell_p$  gegeven door de vectorvoorstelling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$$

Verder is gegeven de cirkel  $c$  met middelpunt  $B$  die door punt  $A$  gaat.

7pt c Bereken exact de waarden van  $p$  waarvoor geldt dat  $\ell_p$  een raaklijn is van cirkel  $c$ .

## Opgave 4 – Twee logaritmische functies

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

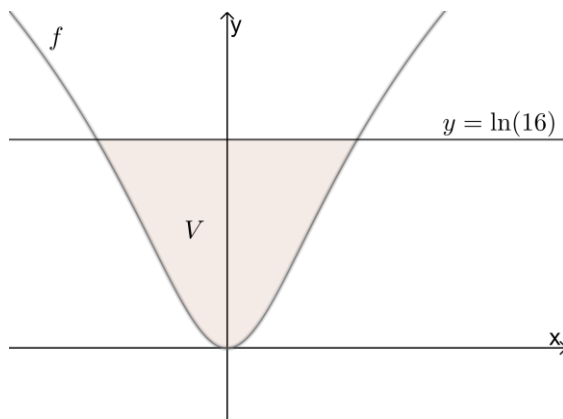
Gegeven zijn de functies  $f(x) = 2 \ln(x^2 + 1)$  en  $g(x) = \ln\left(\frac{9}{2}x^2\right)$ .

- 6pt a Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van  $f$  en  $g$ .

De grafiek van  $f$  heeft twee buigpunten.

- 6pt b Bereken exact de x-coördinaten van deze twee buigpunten.

In de figuur hieronder is  $V$  het vlakdeel dat wordt ingesloten door de grafiek van  $f$  en de horizontale lijn  $y = \ln(16)$ .



- 7pt c Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als  $V$  wordt gewenteld rond de y-as.

*Einde van het tentamen.*

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of uw naam en het opgavenummer op ieder antwoordblad staat.*

*Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.*

*Wat er niet in het mapje moet:*

- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;*
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;*
- kladpapier;*
- deze opgaven.*

*Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.*

*Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).*

## Formulelijst wiskunde B

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(t + u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$$

$$\sin(t - u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$$

$$\cos(t + u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$$

$$\cos(t - u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$$

$$\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t)$$