Uitwerkingen CCVW Wiskunde B 22-4-2022

Vraag 1a - 6 punten

$f(2) = \frac{4-8-5}{4-2} = -\frac{9}{2}$; $f(6) = \frac{36-24-5}{4-6} = -\frac{7}{2}$

De lijn door P en Q heeft dus richtingscoëfficiënt $\frac{-\frac{7}{2}+\frac{9}{2}}{6-2} = \frac{1}{4}$

$$f'(x) = \frac{(2x-4)\cdot(4-x)-(x^2-4x-5)\cdot(-1)}{(4-x)^2}$$

Dit geeft $f'(2) = \frac{0+4-8-5}{4} = -\frac{9}{4}$

$\frac{1}{4}\cdot -\frac{9}{4} \neq -1$, dus lijn ℓ snijdt de grafiek van f niet loodrecht in punt P.

Vraag 1b - 3 punten

$$-x+\frac{5}{x-4} = -x\cdot\frac{x-4}{x-4}+\frac{5}{x-4} = \frac{-x^2+4x+5}{x-4} = \frac{-(x^2-4x-5)}{-(4-x)} = f(x)$$

Alternatief:

$$f(x) = \frac{x^2-4x}{4-x}-\frac{5}{4-x} = \frac{x\cdot(x-4)}{4-x}+\frac{-5}{4-x} = -x+\frac{5}{x-4}$$

Vraag 1c - 7 punten

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2-4x-5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$

De oppervlakte van *V* wordt dus gegeven door

$$\int_{-1}^{0} -f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x-\frac{5}{x-4}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2-5\ln(|x-4|)\right]_{-1}^{0}$$

$$\dots = (0-5\ln(4))-\left(\frac{1}{2}-5\ln(5)\right) = 5\ln(5)-5\ln(4)-\frac{1}{2}$$

Vraag 1d - 5 punten

Er is geen verticale asymptoot als de teller en de noemer tegelijk 0 zijn..

$x^2-4x-5 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$,
dus er is geen verticale asymptoot voor $a = -1$ en voor $a = 5$

Voor $x \neq -1$ geldt $g_{-1}(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{-1-x} = -x+5$

De grafiek van g_{-1} is dus de lijn $y = -x+5$ met een perforatie in $(-1{,}6)$

Vraag 2a - 6 punten

$y = 0 \Leftrightarrow 2\cos(3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(3t) = \dfrac{1}{2}$

Dit geeft $3t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee 3t = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

Hieruit volgt $t = \frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \vee t = -\frac{1}{9}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

Oplossingen met $0 \le t \le 2\pi$: $t = \frac{1}{9}\pi$, $t = \frac{7}{9}\pi$, $t = \frac{13}{9}\pi$, $t = \frac{5}{9}\pi$, $t = \frac{11}{9}\pi$, $t = \frac{17}{9}\pi$

$t = \frac{1}{9}\pi$ geeft $x = 2 - 3\sin^2\left(\frac{1}{9}\pi\right) \approx 1{,}65$; $t = \frac{7}{9}\pi$ geeft $x = 2 - 3\sin^2\left(\frac{7}{9}\pi\right) \approx 0{,}76$;
$t = \frac{13}{9}\pi$ geeft $x = 2 - 3\sin^2\left(\frac{13}{9}\pi\right) \approx -0{,}91$; $t = \frac{5}{9}\pi$ geeft $x = 2 - 3\sin^2\left(\frac{5}{9}\pi\right) \approx -0{,}91$;
$t = \frac{11}{9}\pi$ geeft $x = 2 - 3\sin^2\left(\frac{11}{9}\pi\right) \approx 0{,}76$; $t = \frac{17}{9}\pi$ geeft $x = 2 - 3\sin^2\left(\frac{17}{9}\pi\right) \approx 1{,}65$
Alternatief: De baan begint op $t = 0$ in punt $(2,1)$, gaat dan eerst langs C, dan langs A en dan langs B tot bij het keerpunt $(2,-3)$ op $t = \pi$. Dan weer terug via B, A en C.

In punt *A* geldt dus $t = \frac{5}{9}\pi$ of $t = \frac{13}{9}\pi$, in punt *B* geldt $t = \frac{7}{9}\pi$ of $t = \frac{11}{9}\pi$
en in punt *C* geldt $t = \frac{1}{9}\pi$ of $t = \frac{17}{9}\pi$

Vraag 2b - 6 punten

De raaklijn is evenwijdig met de *x*-as als $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$ en $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \neq 0$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow -6\sin(3t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 + k \cdot \dfrac{1}{3}\pi$

$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -6\sin(t)\cos(t)$

$t = 0$, $t = \pi$ en $t = 2\pi$ geven $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 0$ en $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$, dus geen raaklijn.

$t = \frac{1}{3}\pi$ en $t = \frac{5}{3}\pi$ geven $x = -\frac{1}{4}$ en $y = -3$

$t = \frac{2}{3}\pi$ en $t = \frac{4}{3}\pi$ geven $x = -\frac{1}{4}$ en $y = 1$

Vraag 2c - 5 punten

$y = x \Leftrightarrow 2 - 3\sin^2(t) = \dfrac{3}{2}\cos(t) - 1 \Leftrightarrow 2 - 3(1 - \cos^2(t)) = \dfrac{3}{2}\cos(t) - 1$

Dit geeft $2 - 3 + 3\cos^2(t) = \frac{3}{2}\cos(t) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(t) - \frac{1}{2}\cos(t) = 0$

Hieruit volgt $\cos(t)\left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \vee \cos(t) = \frac{1}{2}$

$\cos(t) = 0$ geeft $t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = 1\frac{1}{2}\pi$

$\cos(t) = \frac{1}{2}$ geeft $t = \pm\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$, dus $t = \frac{1}{3}\pi$ of $t = \frac{5}{3}\pi$

Vraag 2d - 4 punten

Er moet gelden: $2\cos(2t) - 1 = \frac{4}{3}(2 - 3\sin^2(t)) - 1\frac{2}{3}$

Dit geeft $2(1 - 2\sin^2(t)) - 1 = \frac{8}{3} - 4\sin^2(t) - \frac{5}{3}$
of $2(2\cos^2(t) - 1) - 1 = \frac{4}{3}(2 - 3(1 - \cos^2(t))) - \frac{5}{3}$

Haakjes wegwerken geeft $1 - 4\sin^2(t) = 1 - 4\sin^2(t)$ of $4\cos^2(t) - 3 = 4\cos^2(t) - 3$

Vraag 3a - 6 punten

$BC = CD\ (= AB = 6)$, dus BCD is een gelijkbenige driehoek met $\angle CBD = \angle CDB$
Uit $\angle BCD + \angle CBD + \angle CDB = 180°$ en $\angle BCD = 120°$ volgt dan $\angle CBD = 30°$
Het snijpunt van de bissectrice van $\angle BCD$ en de lijn door B en D noemen we S.
Omdat $\angle BCS = \frac{1}{2}\angle BCD = 60°$, is BCS een rechthoekige driehoek met $\angle S = 90°$
Dit geeft $\frac{BS}{BC} = \cos(\angle CBS) = \cos(\angle CBD)$ en $\frac{CS}{BC} = \sin(\angle CBS) = \sin(\angle CBD)$
Hieruit volgt: $BS = BC \cdot \cos(30°) = 6 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, dus $y_C = y_B + BS = 0 + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
en $CS = BC \cdot \sin(30°) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$, dus $x_C = x_B + CS = 3 + 3 = 6$

Vraag 3b met richtingscoëfficiënt en tangens - 7 punten

Uit de symmetrie van de zeshoek kunnen we afleiden dat E het punt $\left(-3, 6\sqrt{3}\right)$ is
en dat F het punt $\left(-6, 3\sqrt{3}\right)$ is

Dit kan "netjes" bewezen worden met de constructie van vraag 3a en dat is ook niet al te moeilijk, maar dat hoeft niet.

Hieruit volgt dat R het punt $\left(-4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ is
De richtingscoëfficiënt van BR is $\frac{0-4\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3+4\frac{1}{2}} = \frac{-4\frac{1}{2}\sqrt{3}}{7\frac{1}{2}} = -\frac{3}{5}\sqrt{3}$
De scherpe hoek die BR met de *x*-as maakt is zodoende $\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\sqrt{3}\right)$
Dit is afgerond gelijk aan $46°$
De hoek die BR met de *y*-as maakt is zodoende $90° - 46° = 44°$

Vraag 3b met richtingsvectoren en cosinus - 7 punten

Uit de symmetrie van de zeshoek kunnen we afleiden dat E het punt $\left(-3, 6\sqrt{3}\right)$ is
en dat F het punt $\left(-6, 3\sqrt{3}\right)$ is

Dit kan "netjes" bewezen worden met de constructie van vraag 3a en dat is ook niet al te moeilijk, maar dat hoeft niet.

Hieruit volgt dat R het punt $\left(-4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ is
De richtingsvector van BR is dus $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\frac{1}{2}\\4\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\frac{1}{2}\\-4\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$
Voor de hoek tussen BR en de *y*-as (met richtingsvector $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$) geldt dus:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left(\begin{pmatrix}7\frac{1}{2}\\-4\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}{\sqrt{\left(7\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-4\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} \cdot 1} = \frac{-4\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{117}} \approx -0{,}72$$

Dit geeft $\alpha = \cos^{-1}(-0{,}72) \approx 136°$

Vraag 3c met invullen coördinaten - 7 punten

De vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2+(y-0)^2=6^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=36$

Invullen van $x=-7+\lambda$ en $y=\lambda p$ geeft $(-10+\lambda)^2+(\lambda p)^2=36$

Dit geeft $100-20\lambda+\lambda^2+\lambda^2p^2=36 \Leftrightarrow (1+p^2)\lambda^2-20\lambda+64=0$

ℓ_p raakt de cirkel als deze vergelijking één oplossing heeft.

Dit is als $D=(-20)^2-4\cdot(1+p^2)\cdot 64=0$

Dus als $400-256-256p^2=0 \Leftrightarrow 256p^2=144 \Leftrightarrow p^2=\frac{144}{256}=\frac{9}{16}$

Dit geeft $p=\frac{3}{4}$ of $p=-\frac{3}{4}$

Vraag 3c met vergelijking lijn ℓ_p en vergelijking cirkel - 7 punten

De vergelijking van ℓ_p is $y=px+7p$

Kan met de normaalvector van $\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix}$*, met de richtingscoëfficiënt* $(=p)$

of door λ *te elimineren uit* $\begin{cases}x=-7+\lambda\\ y=p\lambda\end{cases}$

De vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2+(y-0)^2=6^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=36$

Invullen van $y=px+7p$ geeft $(x-3)^2+(px+7p)^2=36 \Leftrightarrow$

$$x^2-6x+9+(px)^2+14p^2x+(7p)^2=36 \Leftrightarrow (1+p^2)x^2+(14p^2-6)x+49p^2-27=0$$

ℓ_p raakt de cirkel als deze vergelijking één oplossing heeft.

Dit is als $D=(14p^2-6)^2-4\cdot(1+p^2)\cdot(49p^2-27)=0$

$$\Leftrightarrow 196p^4-168p^2+36-196p^4-88p^2+108=0 \Leftrightarrow -256p^2+144=0 \Leftrightarrow p^2=\frac{144}{256}=\frac{9}{16}$$

Dit geeft $p=\frac{3}{4}$ of $p=-\frac{3}{4}$

Vraag 3c met vergelijking lijn ℓ_p en afstandsformule - 7 punten

De vergelijking van ℓ_p is $y=px+7p \Leftrightarrow px-y+7p=0$

Kan met de normaalvector van $\begin{pmatrix}1\\p\end{pmatrix}$*, met de richtingscoëfficiënt* $(=p)$

of door λ *te elimineren uit* $\begin{cases}x=-7+\lambda\\ y=p\lambda\end{cases}$

De afstand van deze lijn tot punt B moet gelijk zijn aan 6

De afstandsformule geeft $d(B,\ell_p)=\frac{|p\cdot x_B-1\cdot y_B+7p|}{\sqrt{p^2+(-1)^2}}=\frac{|p\cdot 3-1\cdot 0+7p|}{\sqrt{p^2+(-1)^2}}=\frac{|10p|}{\sqrt{p^2+1}}$

$d(B,\ell_p)=6$ geeft $|10p|=6\sqrt{p^2+1} \Leftrightarrow (10p)^2=36(p^2+1)$

$$\Leftrightarrow 100p^2=36p^2+36 \Leftrightarrow 64p^2=36 \Leftrightarrow p^2=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$$

Dit geeft $p=\frac{3}{4}$ of $p=-\frac{3}{4}$

Vraag 3c met vectorvoorstelling loodlijn uit B op lijn ℓ_p - 7 punten

Als ℓ_p raaklijn is aan de cirkel, staat de lijn door B en het raakpunt loodrecht op ℓ_p

De vectorvoorstelling van deze lijn is $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -p \\ 1 \end{pmatrix}$

Voor het snijpunt van deze lijn met ℓ_p geldt: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -p \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3 - p\mu = -7 + \lambda \\ \mu = p\lambda \end{cases} \Rightarrow 3 - p^2\lambda = -7 + \lambda \Leftrightarrow (p^2+1)\lambda = 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{10}{p^2+1}$$

Dit geeft $x = -7 + \frac{10}{p^2+1}$ en $y = \frac{10p}{p^2+1}$

Dit punt moet op cirkel c met vergelijking $(x-3)^2 + y^2 = 36$ liggen.

Merk op dat $x - 3 = -7 + \frac{10}{p^2+1} - 3 = -10 + \frac{10}{p^2+1} = \frac{-10p^2}{p^2+1}$

Dit invullen in de vergelijking van de cirkel geeft

$$\frac{100p^4}{(p^2+1)^2} + \frac{100p^2}{(p^2+1)^2} = 36 \Leftrightarrow 100p^4 + 100p^2 = 36(p^4 + 2p^2 + 1) \Leftrightarrow 64p^4 - 28p^2 - 36 = 0$$

$\Leftrightarrow 16p^4 + 7p^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow p^2 = \frac{-7-\sqrt{49+576}}{32} = \frac{-7-25}{32}$ (kan niet) of $p^2 = \frac{-7+25}{32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

Dit geeft $p = \frac{3}{4}$ of $p = -\frac{3}{4}$

Vraag 3c met vergelijking loodlijn uit B op lijn ℓ_p - 7 punten

Als ℓ_p raaklijn is aan de cirkel, staat de lijn door B en het raakpunt loodrecht op ℓ_p

De vergelijking van ℓ_p is $y - 0 = p\big(x - (-7)\big) \Leftrightarrow y = px + 7p$

De vergelijking van de lijn door B loodrecht op ℓ_p is $y - 0 = -\frac{1}{p}(x-3) \Leftrightarrow y = -\frac{x}{p} + \frac{3}{p}$

Voor het snijpunt geldt: $px + 7p = -\frac{x}{p} + \frac{3}{p} \Leftrightarrow p^2x + 7p^2 = -x + 3 \Leftrightarrow (p^2+1)x = 3 - 7p^2$

Dit geeft $x = \frac{3-7p^2}{p^2+1}$ en $y = \frac{3p-7p^3}{p^2+1} + 7p = \frac{10p}{p^2+1}$

Merk op dat $x - 3 = \frac{3-7p^2}{p^2+1} - 3 = \frac{3-7p^2}{p^2+1} + \frac{-3p^2-3}{p^2+1} = \frac{-10p^2}{p^2+1}$

Zie verder hierboven.

Vraag 4a - 6 punten

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\ln(x^2+1) = \ln\left(\frac{9}{2}x^2\right) \Leftrightarrow \ln((x^2+1)^2) = \ln\left(\frac{9}{2}x^2\right)$

Dit geeft $(x^2+1)^2 = \frac{9}{2}x^2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = \frac{9}{2}x^2 \Leftrightarrow x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 1 = 0$

Substitutie van $y = x^2$ *geeft* $y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0$

Hieruit volgt $x^2 \ (= y) = 2$ of $x^2 \ (= y) = \frac{1}{2}$

Met $y = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2}$ *of met* $y^2 - \frac{5}{2}y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-2)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0$

Oplossingen: $x = \sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}$; $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ $\left(= \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$; $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\left(= -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

Snijpunten: $\left(\sqrt{2}, \ln(9)\right)$; $\left(-\sqrt{2}, \ln(9)\right)$; $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \ln\left(\frac{9}{4}\right)\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \ln\left(\frac{9}{4}\right)\right)$

Vraag 4b - 6 punten

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{4x}{x^2+1}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4 - 4x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Vraag 4c - 7 punten

Deze inhoud wordt gegeven door $\pi \cdot \int_0^{\ln(16)} x^2 \, \mathrm{d}y$

$y = 2\ln(x^2+1) \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = \frac{1}{2}y \Leftrightarrow x^2 + 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y} \Leftrightarrow x^2 = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y} - 1$

Een primitieve van $g(y) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}y} - 1$ is $G(y) = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}y} - y$

De inhoud is dus gelijk aan

$$\pi \cdot \left(G(\ln(16)) - G(0)\right) = \pi \cdot \left(\left(2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(16)} - \ln(16)\right) - (2\mathrm{e}^0 - 0)\right)$$

$$= \pi \cdot (2 \cdot 4 - \ln(16) - 2 \cdot 1) = \pi \cdot (6 - \ln(16))$$

