CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 20 juli 2020
Tijd: 3 uur
Aantal opgaven: 7

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6	7
a	4	6	3	4	4	5	3
b	6	5	3	5	2	1	4
c	5	4	4		4	6	5
d	5						2
Totaal	20	15	10	9	10	12	14

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche berekeningen

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = 5 - 2x - 4x^2$$

4pt a Bereken algebraïsch de coördinaten van het (de) gemeenschappelijke punt(en) van de grafiek van f en de rechte lijn met vergelijking $y = 10x + 14$.

l is de raaklijn aan de grafiek van f in punt $A(0,5)$.
m is de lijn met vergelijking $x - 4y = 4$.

6pt b Bereken algebraïsch de *x*-coördinaat van het snijpunt van lijnen l en m.

De functie g wordt gegeven door

$$g(x) = \frac{x+2}{2x+10}$$

Er liggen twee punten op de grafiek van g waarin de helling van de raaklijn aan deze grafiek gelijk is aan $\frac{1}{6}$.

5pt c Gebruik de afgeleide functie van g om de *x*-coördinaten van deze twee punten algebraïsch te berekenen.

De functie h wordt gegeven door

$$h(x) = 3 + 4 \cdot \log(5x)$$

5pt d Bereken algebraïsch de waarde van x waarvoor $h(x) = 11$.

Opgave 2 – Spelen voor de maximale winst

Als een nieuw speeltje op de markt gebracht wordt, neemt de winst op de verkoop van dit speeltje in het begin toe omdat veel kinderen dit nieuwe speeltje willen proberen. Later neemt de winst weer af omdat het speeltje niet meer zo nieuw is.

De Gelo speelgoedfabriek wil een nieuw speeltje op de markt brengen. De marketingafdeling heeft twee modellen ontwikkeld voor de winst op de verkoop van dit speeltje als functie van de tijd.

In het eerste model wordt de winst gegeven door de formule

$$W_1(t) = 450t - 25t \cdot \sqrt{t}$$

In deze formule is t de tijd in dagen met $t = 0$ op het moment dat het speeltje op de markt gebracht wordt en is $W_1(t)$ de winst per dag in euro's.

6pt **a** Bereken algebraïsch de maximale winst per dag voor de Gelofabriek volgens dit eerste model.

In het tweede model wordt de winst gegeven door de formule

$$W_2(t) = 7{,}7t^2 \cdot \mathrm{e}^{-t/72}$$

In deze formule is t weer de tijd in dagen met $t = 0$ op het moment dat het speeltje op de markt gebracht wordt en is $W_2(t)$ de winst per dag in euro's.

5pt **b** Gebruik de afgeleide functie van $W_2(t)$ om aan te tonen dat volgens dit tweede model de winst per dag van de Gelofabriek maximaal is op $t = 144$.

Uit ervaring weet de Gelofabriek dat er twee jaar na de introductie nog steeds een kleine winst gemaakt wordt. Vier jaar na de introductie is de winst praktisch gesproken gelijk aan 0. *Stel dat 1 jaar = 365 dagen.*

4pt **c** Komt één van deze twee modellen overeen met deze ervaring? Gebruik een berekening om uw antwoord toe te lichten.

Opgave 3 – Fietswielen

In een fietsenfabriek wordt de kwaliteit van fietswielen getest.

Bij een eerste test wordt een sensor geplaatst op de spaak van een wiel en wordt dit wiel met een constante snelheid rond zijn as gedraaid. De afstand in centimeter tussen de sensor en de vloer als functie van de tijd in seconden wordt gegeven door de formule

$$H(t) = 135 + 30\sin(10\pi t)$$

3pt a Bereken algebraïsch de minimale en de maximale waarde van $H(t)$.

3pt b Bereken algebraïsch hoeveel keer per seconde het wiel rond zijn as draait.

Bij een andere test wordt de sensor op de spaak van een tweede wiel geplaatst. Dit wiel wordt ook met een constante snelheid rond zijn as gedraaid. Bij het begin van de test ($t = 0$) bevindt de sensor zich op 123 cm boven de vloer. Op $t = 0{,}07$ is de sensor voor het eerst op zijn hoogste punt, dat is op 140 cm boven de vloer. En op $t = 0{,}21$ bevindt de sensor zich voor het eerst op zijn laagste punt, dat is op 106 cm boven de vloer.

De afstand in centimeters tussen de sensor en de vloer wordt gegeven door een formule van de vorm $H(t) = A + B\sin(Ct)$.

4pt c Bepaal waarden voor A, B en C die overeenkomen met de hierboven gegeven omschrijving.

Opgave 4 – Een dagje naar het strand

Annie (vrouw, leeftijd 18 jaar), Bert (man, leeftijd 19 jaar), Carla (vrouw, leeftijd 20 jaar), Duncan (man, leeftijd 19 jaar), Erica (vrouw, leeftijd 18 jaar), Freddie (man, leeftijd 18 jaar), Gina (vrouw, leeftijd 20 jaar) en Ivan (man, leeftijd 19 jaar) vormen een groep van 8 vrienden. Op een mooie dag willen ze samen naar het strand. De auto waarover ze beschikken, heeft echter maar plaats voor 5 van hen. Dit betekent dat 3 van hen met het openbaar vervoer naar het strand moeten gaan. Ze trekken lootjes om te bepalen wie er met het openbaar vervoer gaat.

4pt a Bereken de kans dat precies 2 van de mannen met het openbaar vervoer gaan.

5pt b Bereken de kans dat de gemiddelde leeftijd van de 3 vrienden die met het openbaar vervoer gaan, precies 19 jaar is.

Opgave 5 – WADA

Het Wereld Anti-Doping Agentschap WADA controleert ongeveer 250 000 in- en out-of-competition doping tests per jaar. Deze tests worden uitgevoerd door een aantal over de wereld verspreide geaccrediteerde doping laboratoria.

In deze opgave bekijken we een fictief doping laboratorium dat ieder jaar 10 000 keer een specifieke out-of-competition test uitvoert. Dit wil het aantal foute beschuldigingen minimaal houden en heeft daarvoor gekozen voor een test met een hoge specificiteit. Als een sporter clean is, geeft de test in 96% van de gevallen een negatieve uitslag. Een hoge specificiteit gaat vaak ten koste van de sensitiviteit van een test. Voor deze test geldt dat als een sporter doping heeft gebruikt, de test in 64% van de gevallen een positieve uitslag geeft.
Verder nemen we aan dat de geteste sporter bij 2% van de tests doping gebruikt heeft.

4pt **a** Neem de kruistabel hieronder over op uw antwoordblad en vul de ontbrekende getallen in.

	Positieve test	Negatieve test	
Doping gebruikt			200
Clean			
			10 000

2pt **b** Bereken de kans dat een sporter die positief getest wordt, inderdaad doping gebruikt heeft.

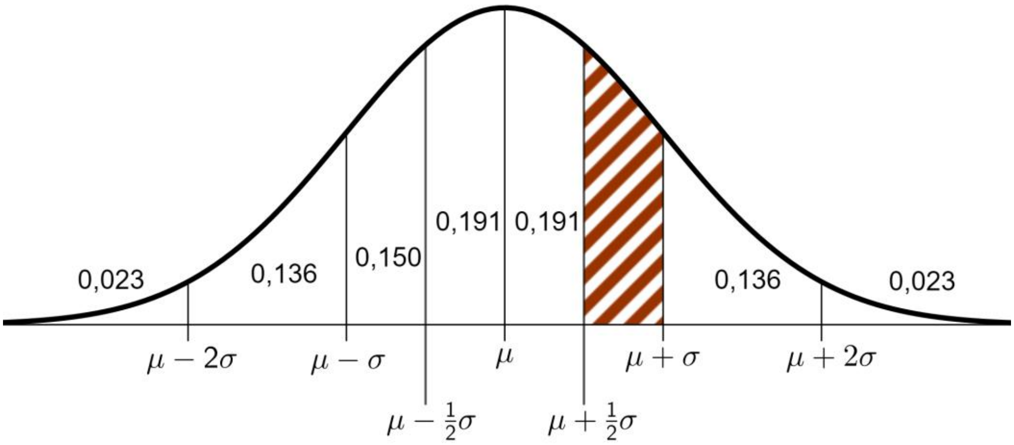
WADA controleert regelmatig hoe de geaccrediteerde doping laboratoria functioneren. Bij één van deze controles selecteert WADA lukraak 100 tests van verschillende laboratoria voor nader onderzoek. We nemen nog steeds aan dat 2% van de geteste sporters doping gebruikt heeft.

4pt **c** Bereken de kans dat in precies 3 van deze 100 tests de geteste sporter doping gebruikt heeft.

Opgave 6 – Kazen wegen

Bert heeft een zuivelboerderij in de mooie streek Waterland, net ten Noorden van Amsterdam. Daar produceert hij Edammer kazen. Vorig jaar produceerde hij 2500 van deze kazen. Het gewicht van deze kazen was normaal verdeeld met een gemiddelde van 1110 g en een standaardafwijking van 20 g. Het grootste deel van deze kazen is gekocht door een regionale supermarktketen. Om al te grote verschillen tussen de door hen gekochte kazen te voorkomen, heeft deze keten alleen de kazen met een gewicht tussen 1100 g en 1150 g gekocht.

5pt a Gebruik de figuur hieronder om het aantal kazen te berekenen dat Bert vorig jaar aan de supermarktketen verkocht heeft.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$.

Bert wil bereiken dat het gewicht van de kazen dit jaar beter aansluit op de wensen van de supermarktketen. Daarom verandert hij het recept met de bedoeling om het gemiddelde gewicht van de kazen te verhogen. Om te toetsen of de verandering van het recept het gewenste effect heeft, weegt hij 25 kazen die volgens het nieuwe recept geproduceerd zijn. In deze toetsingsprocedure neemt hij een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0{,}05$ en neemt hij aan dat de standaardafwijking van de gewichten nog steeds 20 g is.

1pt b Wat is de nulhypothese en wat is de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure?

6pt c Wat is de uitkomst van deze toetsingsprocedure als het gemiddelde gewicht van deze 25 kazen 1120 g is?

Opgave 7 – E-bikes

Op het eiland Windbergen waren fietsen nooit populair vanwege de vele wind en het bergachtige landschap. Totdat in 2010 e-bikes werden geïntroduceerd. Van juli 2010 tot juli 2020 nam het aantal e-bikes toe met 40% per jaar. Op dit moment zijn er 70 000 e-bikes op het eiland.

3pt a Bereken algebraïsch hoeveel e-bikes er op het eiland waren in juli 2010.

4pt b Bereken algebraïsch de maand waarin er 90 000 e-bikes op het eiland zouden zijn als het aantal e-bikes exponentieel zou blijven groeien.

Omdat een groot deel van de inwoners nu een e-bike heeft, wordt er voorspeld dat het aantal e-bikes van nu af aan niet meer met 40% per jaar zal groeien. In plaats hiervan wordt de groei van het aantal e-bikes gemodelleerd met de formule

$$N(t) = 5 \cdot (24 - 10 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}04t})$$

In deze formule is $N(t)$ het aantal e-bikes in duizenden en is t de tijd in maanden met $t = 0$ op 1 juli 2020.

5pt c Bereken algebraïsch de maand waarin er volgens deze formule 90 000 e-bikes zullen zijn op Windbergen.

2pt d Wat zal volgens deze formule het maximale aantal e-bikes op Windbergen kunnen worden?

Einde van het tentamen.

Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \frac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\ldots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g=\mu_T-1{,}645\sigma_T$	$g=\mu_T+1{,}645\sigma_T$	$g_l=\mu_T-1{,}96\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+1{,}96\sigma_T$
0,01	$g=\mu_T-2{,}33\sigma_T$	$g=\mu_T+2{,}33\sigma_T$	$g_l=\mu_T-2{,}58\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+2{,}58\sigma_T$

