CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 19 april 2019
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:						
Opgave	1	2	3	4	5	6
a	4	3	4	3	3	4
b	5	3	4	3	3	2
c	5	4	5	5	2	5
d	5		5	6	5	2
Totaal	19	10	18	17	13	13

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche berekeningen

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals $\sqrt{2}$ en $\log(3)$.*
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

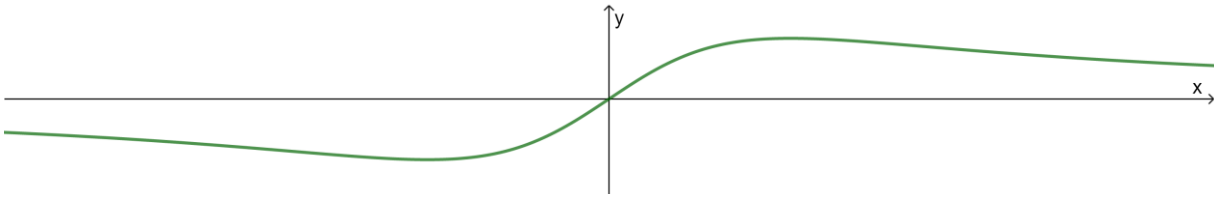
4pt a Los de vergelijking $2x^2 - 3x^3 = x$ algebraïsch op.

Gegeven worden lijn *k* met vergelijking $2x - 3y = 5$ en lijn l met vergelijking $y = 3x - 2$. Lijn m is evenwijdig aan lijn *k* en gaat door de oorsprong $O(0,0)$.

5pt b Bereken de coördinaten van het snijpunt van lijn l en lijn m.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek van de functie f met functievoorschrift

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 9}$$



5pt c Gebruik de afgeleide functie van f om de minimale en de maximale waarde van $f(x)$ te berekenen.

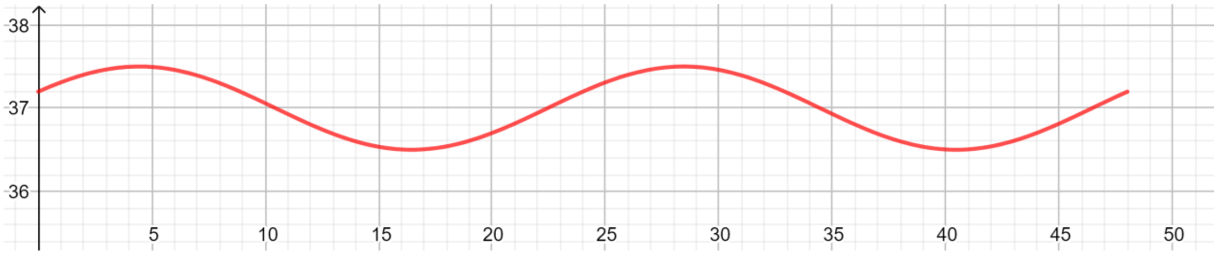
5pt d Bereken algebraïsch de coördinaten van het (de) snijpunt(en) van de grafiek van f met de grafiek van de functie g met functievoorschrift

$$g(x) = \frac{3}{2x + 3}$$

 © CCVW

Opgave 2 – Een modelpatiënt

De temperatuur van een patiënt in een ziekenhuis wordt gedurende 48 uur continu gemeten. Het resultaat van deze metingen is weergegeven in onderstaande grafiek.



De functie in deze grafiek heeft een formule van de vorm

$$T(t) = A + B\sin\big(0{,}262(t + 1{,}45)\big)$$

In deze formule is T de temperatuur van de patiënt in ℃ en is t de tijd in uren, met $t = 0$ om 12 uur ’s-middags (12:00) op de eerste dag.

3pt a Bepaal de waarden van A en B.

3pt b Laat zien dat het getal 0,262 in de formule overeenkomt met de informatie die is weergegeven in de grafiek.

4pt c Bereken algebraïsch het tijdstip waarop de temperatuur van de patiënt iedere dag maximaal is. Geef uw antwoord in de vorm uu:mm .

Opgave 3 – Winst vergroten

In een zekere stad is er een bedrijf dat de enige verkoper is van goed G.
De vraag naar dit goed is zo groot, dat het gehele aanbod van dit goed wordt verkocht. De prijs waarvoor dit goed op een bepaalde dag verkocht wordt, hangt echter wel af van de grootte van het aanbod op die dag. Deze prijs wordt gegeven door de formule

$$P(Q) = 10 - \sqrt{3Q}$$

($P(Q)$ is de prijs in euro's per kg, het aanbod Q is in duizenden kg).
De winst (in duizenden euro's) van het bedrijf wordt gegeven door de formule

$$W(Q) = 7Q - \sqrt{3Q^3} - 6$$

Op dit moment biedt het bedrijf iedere dag 12 000 kg van goed G aan.

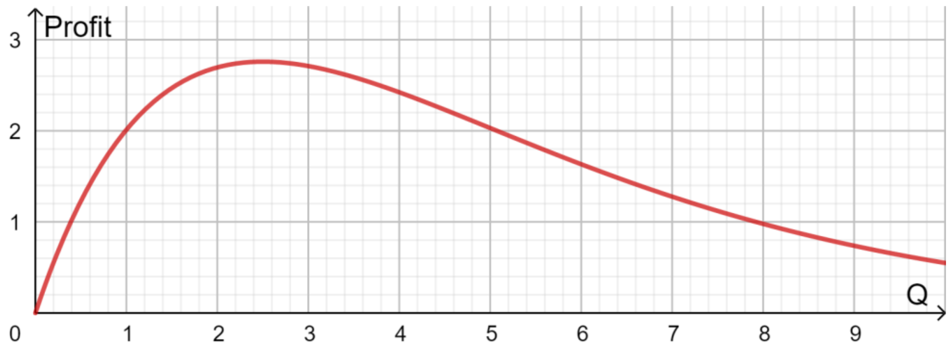
4pt **a** Bereken de totale opbrengst in euro's op een dag waarop het aanbod 12 000 kg is.
Bereken ook de winst in euro's op zo'n dag.

4pt **b** Gebruik het verband $Winst = Opbrengst - Kosten$ om een formule te bepalen voor de kosten als functie van Q.

Het bedrijf vraagt je om te onderzoeken of vergroting van het dagelijkse aanbod van 12 000 kg zal leiden tot vergroting van de winst.

5pt **c** Gebruik de afgeleide van de winstfunctie om deze vraag te beantwoorden.

De winstfunctie van een ander goed wordt gegeven door $W(Q) = 3Q \cdot \mathrm{e}^{-0{,}4Q}$.
In de figuur hieronder ziet u de grafiek van deze functie (Profit = Winst).



In de figuur lijkt deze tweede winstfunctie een maximum te hebben voor $Q = 2{,}5$.

5pt **d** Toon met behulp van de afgeleide van deze tweede winstfunctie aan dat dit inderdaad het geval is.

Opgave 4 – Twee dobbelstenen

Johan heeft twee dobbelstenen: een gewone dobbelsteen, waarbij de uitkomsten 1, 2, 3, 4, 5 en 6 even waarschijnlijk zijn, en een viervlaksdobbelsteen, waarbij de uitkomsten 1, 2, 3 en 4 even waarschijnlijk zijn (zie de foto hiernaast).

De uitkomst van een worp met de gewone dobbelsteen is een toevalsvariabele *X* met verwachtingswaarde $E(X) = 3\frac{1}{2}$ en standaardafwijking $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}}$.

De uitkomst van een worp met de viervlaksdobbelsteen is een toevalsvariabele *Y* met verwachtingswaarde $E(Y) = 2\frac{1}{2}$ en standaardafwijking $\sigma(Y) = \sqrt{\frac{5}{4}}$.

3pt **a** Controleer met een duidelijke berekening dat $E(Y) = 2\frac{1}{2}$.

Johan werpt met beide dobbelstenen tegelijk. De som van de uitkomsten van beide dobbelstenen is een toevalsvariabele *S*.

3pt **b** Bereken $\sigma(S)$.

5pt **c** Bereken de kans dat de som van de uitkomsten van beide dobbelstenen gelijk is aan $E(S)$.

Vervolgens werpt Johan 10 keer met de gewone dobbelsteen.

6pt **d** Bereken de kans dat bij ten hoogste 7 van deze 10 worpen de uitkomst niet gelijk is aan 6.

 © CCVW

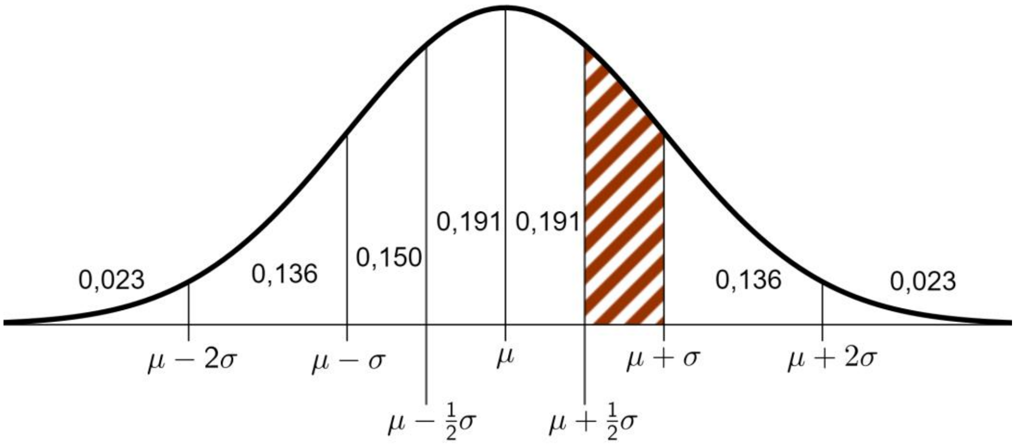
Opgave 5 – Werk in uitvoering

Bert heeft voor een verbouwing balken nodig met een lengte van tenminste 200 cm.
In het dorp waar hij woont zijn er twee houthandels die deze balken verkopen.
De lengte van de balken die houthandel A op voorraad heeft is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu_A = 203$ cm en standaardafwijking $\sigma_A = 6$ cm.
De lengte van de balken die houthandel B op voorraad heeft is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu_B = 207$ cm en standaardafwijking $\sigma_B = 12$ cm.

Bert koopt één balk bij houthandel A en één balk bij houthandel B.
PA is de kans dat de lengte van de balk die Bert bij houthandel A koopt groter is dan 200 cm, PB is de kans dat de lengte van de balk die Bert bij houthandel B koopt groter is dan 200 cm.

3pt a Gebruik de figuur hieronder om PA te bepalen.

3pt b Is PB groter of kleiner dan PA?
Motiveer uw antwoord!



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$.

Bert kan zijn balken ook kopen bij houthandel C in het volgende dorp. Deze houthandel beweert dat de balken die hij in voorraad heeft, een gemiddelde lengte hebben van 205 cm met een standaardafwijking van 10 cm. Om dit te toetsen meet Bert de lengte van de balken in een steekproef van 16 van deze balken. Hij neemt daarbij aan dat de standaardafwijking inderdaad 10 cm is en hij neemt een significantieniveau van $\alpha = 5\%$.

2pt c Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

De gemiddelde lengte van de 16 balken in de steekproef is 200,5 cm.

5pt d Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure bij deze steekproefuitkomst? Motiveer uw antwoord!

 © CCVW

Opgave 6 – Een kolonie bacteriën

In deze opgave onderzoeken we de groei van het gewicht van een kolonie bacteriën. Gedurende de eerste 10 uur van dit onderzoek groeit het gewicht van deze kolonie exponentieel. In deze periode wordt het gewicht bij benadering gegeven door

$$W_E(t) = 600 \cdot 1{,}5^t$$

In deze formule is $W_E(t)$ het gewicht van de kolonie in microgram ($1\ \mu g = 10^{-6}\ g$) en is t de tijd in uren.

4pt a Bereken algebraïsch de tijd waarin het gewicht van de kolonie volgens deze formule verdubbelt. Geef uw antwoord afgerond op hele minuten.

Omdat de beschikbare hoeveelheid voedsel en de beschikbare ruimte beperkt zijn, is het exponentiële groeimodel na 10 uur niet meer geldig. In deze periode wordt het gewicht van de kolonie bij benadering gegeven door

$$W_B(t) = 250 \cdot (700 - 1527\mathrm{e}^{-0{,}1t})$$

In deze formule is $W_B(t)$ het gewicht van de kolonie in microgram en is t de tijd in uren.

2pt b Toon aan dat het gewicht van de kolonie op $t = 10$ volgens de tweede formule bij benadering gelijk is aan het gewicht van de kolonie op $t = 10$ volgens de eerste formule.

5pt c Bereken algebraïsch het tijdstip waarop het gewicht van de kolonie volgens de tweede formule gelijk is aan 0,17 g.

2pt d Hoe groot zal het gewicht van de kolonie volgens de tweede formule op den duur worden?

Einde van het tentamen.

Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

 © CCVW

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

 © CCVW

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$

 © CCVW