CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 17 april 2025
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	5	2	5	5	6	4
b	7	8	2	4	2	4
c	5		4		5	5
d			4			4
Totaal	17	10	15	9	13	17

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functies f en g worden gegeven door $f(x) = 3x^2 + 7x$ en $g(x) = x^2 + 3x + 5$.
De grafieken van f en g hebben twee snijpunten.

5pt **a** Bereken algebraïsch het verschil tussen de *x*-coördinaten van deze twee snijpunten. Geef een benadering van je antwoord afgerond op 4 cijfers achter de komma.

De functie h wordt gegeven door

$$h(x) = \frac{x-3}{2x-1}$$

Er zijn twee punten op de grafiek van h waarvoor geldt dat de helling van de raaklijn aan de grafiek van h in dit punt gelijk is aan 5.

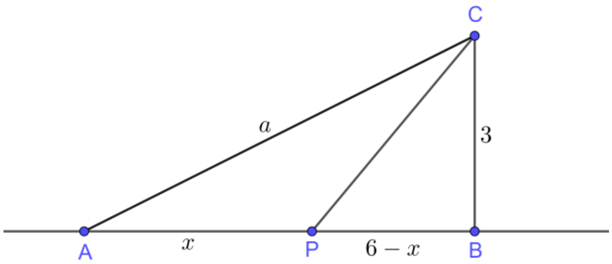
7pt **b** Bereken algebraïsch het verschil tussen de *y*-coördinaten van deze twee punten.

5pt **c** Los algebraïsch op: $32^x = 8^{x-1}$

Opgave 2 – Stroomvoorziening voor een eiland

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In de figuur hieronder geeft de lijn door de punten A, P en B een rechte kustlijn weer.
Op punt A bevindt zich een elektriciteitscentrale.
Op punt C ligt een eiland in de zee, op 3 km uit de kust, recht voor punt B.
De afstand tussen de elektriciteitscentrale in punt A en punt B is 6 km.



Er moet een kabel aangelegd worden van A naar C om het eiland te voorzien van elektriciteit. Hiervoor worden drie trajecten onderzocht:
- direct van A naar C onder de zee
- van A eerst langs de kust naar B en dan onder de zee naar C
- van A eerst langs de kust naar een punt P ergens tussen A en B en dan onder de zee naar C.

De kosten voor het leggen van de kabel langs de kust zijn 40.000 euro per kilometer.
De kosten voor het leggen van de kabel onder zee zijn 50.000 euro per kilometer.

Volgens de stelling van Pythagoras geldt dat a, de afstand in km tussen A en C, gelijk is aan $\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}$.

2pt a Bereken voor welk van de eerste twee trajecten de kosten van de aanleg van de kabel het laagst zijn.

De afstand in km tussen A en P noemen we x. De kosten (in tienduizenden euro's) voor de aanleg van de kabel langs het derde traject worden dan gegeven door

$$K = 4x + 5\sqrt{x^2 - 12x + 45}$$

Dit hoeft u niet aan te tonen.

8pt b Bereken algebraïsch de minimale kosten als de kabel langs het derde traject wordt aangelegd.

Opgave 3 – Kostelijke desserts

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De eigenaresse van een klein hotel serveert haar gasten 's avonds maaltijden voor een vaste prijs, inclusief een dessert of een koffie als afsluiting.
Uit ervaring weet ze dat de kans dat een gast een dessert neemt, voor iedere gast gelijk is aan 0,8.

Op een bepaalde dag verblijven er 10 gasten in het hotel.
Het aantal gasten dat een dessert bestelt, is een toevalsvariabele X.
Uit de bovenstaande gegevens volgt dat $P(X = 10) \approx 0{,}11$ en $P(X = 9) \approx 0{,}27$.

5pt **a** Toon dit aan door deze kansen afgerond op 4 cijfers achter de komma te berekenen.

2pt **b** Bereken de kans dat minder dan 9 van deze 10 gasten een dessert bestellen. Geef uw antwoord afgerond op 2 cijfers achter de komma.

Als de hoteleigenaar de desserts van tevoren klaarmaakt, kost dit haar 5 euro per dessert. Als ze de desserts klaarmaakt nadat de gasten deze hebben besteld, kost dit haar 9 euro per dessert. Omdat ze altijd een grote kan koffie klaarmaakt voor later op de avond, kost het haar niets extra om koffie te serveren.

Als de hoteleigenaar 8 desserts van tevoren klaarmaakt, kunnen de kosten voor de desserts 40 euro, 49 euro of 58 euro bedragen, afhankelijk van het aantal gasten dat een dessert bestelt.

4pt **c** Bereken de verwachte kosten voor de desserts als de hoteleigenaar 8 desserts van tevoren bereidt.

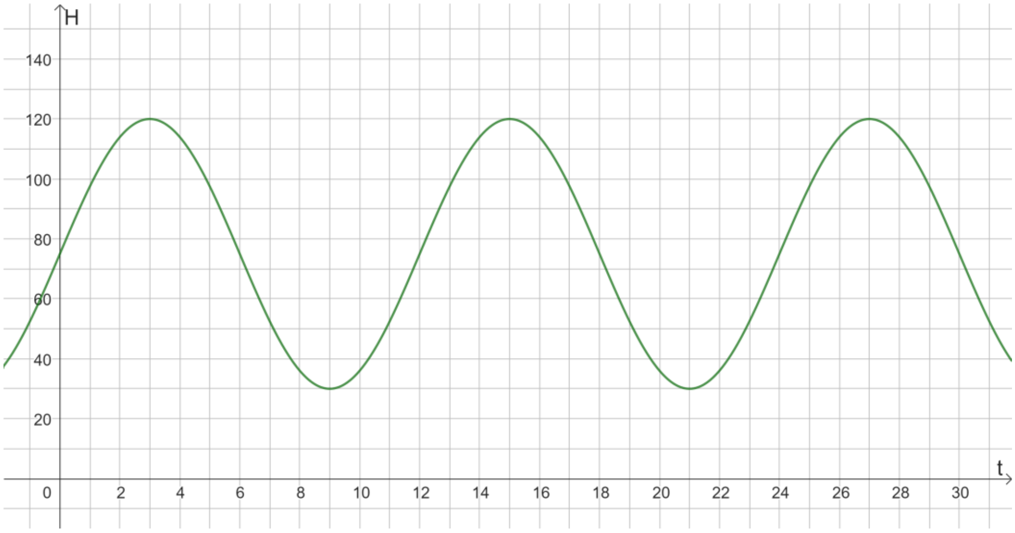
Op een andere dag bereidt de hoteleigenaar 10 desserts van tevoren, 5 met aardbeien en 5 met bananen. Helaas nemen slechts 7 gasten een dessert, dus blijven er 3 desserts over.

4pt **d** Bereken de kans dat er precies één dessert met bananen overblijft, ervan uitgaande dat deze 7 gasten hun desserts willekeurig kiezen.

Opgave 4 – Eb en vloed in een waterloopkundig laboratorium

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In een waterloopkundig laboratorium wordt het effect van eb en vloed in een zeearm onderzocht. Daarvoor wordt een grote waterbak gemaakt waarin de getijdestromen in de zeearm worden gesimuleerd. De figuur hieronder geeft het verband weer tussen de hoogte van het water in centimeters (H) en de tijd in minuten (t) voor één van de meetpunten in de waterbak.



Bij deze figuur hoort een formule van de vorm $H = a + b\sin(c(t - d))$.

5pt a Bepaal met behulp van de figuur waarden van a, b, c en d die in deze formule passen.

Bij een ander onderzoek wordt het verband tussen de hoogte van het water en de tijd op dit meetpunt gegeven door de formule $H = 100 + 30\sin\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$.

In deze formule is H weer de hoogte van het water in centimeters en is t weer de tijd in minuten.

4pt b Bereken algebraïsch de eerste drie tijdstippen na $t = 0$ waarop de hoogte van het water maximaal is.

Opgave 5 – Het gewicht van de 20-jarigen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In het jaar 2000 werd in land L een landelijk onderzoek uitgevoerd naar de gezondheid van 20-jarigen. In dit onderzoek werd vastgesteld dat het gewicht van de 20-jarige mannen normaal verdeeld was met een gemiddelde van $\mu = 82$ kg en een standaardafwijking van $\sigma = 8$ kg. Het gewicht van de 20-jarige vrouwen was normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 73$ kg en een standaarddeviatie van $\sigma = 6$ kg.

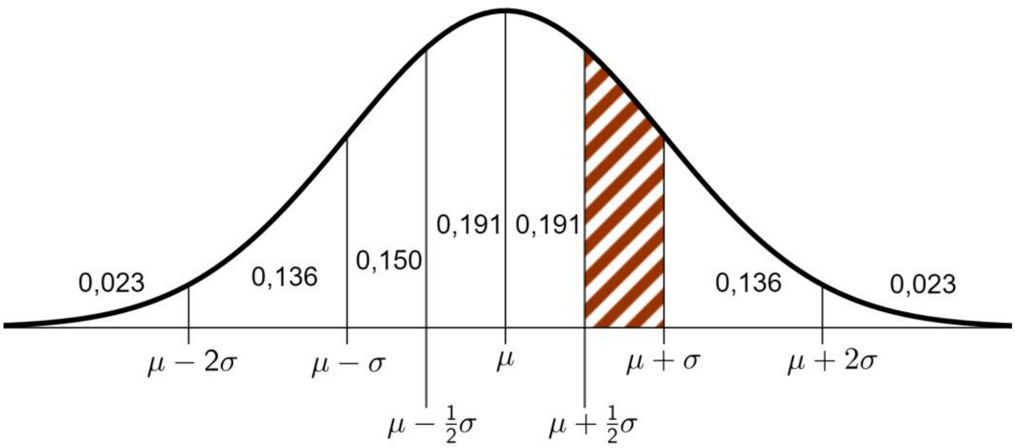
Na een aantal jaar worden de dossiers onderzocht van één willekeurig geselecteerde man en één willekeurig geselecteerde vrouw die aan dit onderzoek hebben deelgenomen.

6pt a Gebruik de figuur onderaan deze pagina om de kans te berekenen dat het totale gewicht van deze twee deelnemers in 2000 groter was dan 160 kg.

De regering van land L wil toetsen of het gemiddelde gewicht van de 20-jarige mannen in 2025 nog steeds 82 kg is. Voor deze toetsingsprocedure wordt het gewicht van 100 willekeurig geselecteerde 20-jarige mannen gemeten.
In deze toetsingsprocedure wordt aangenomen dat het gewicht van de 20-jarige mannen in 2025 normaal verdeeld is met een standaarddeviatie van $\sigma = 8$ kg.
De onbetrouwbaarheidsdrempel van deze toetsingsprocedure is $\alpha = 0{,}05$.

2pt b Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

5pt c Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure als het gemiddelde gewicht van deze 100 mannen $83{,}5$ kg is?



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$.

Opgave 6 – Kunstmatige Intelligentie

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In 2019 introduceerde softwareontwikkelaar BREF het softwarepakket BUTLER dat zijn gebruikers (bedrijven en overheidsinstellingen) ondersteunt bij de toepassing van Kunstmatige Intelligentie.
Op 1 januari 2020 telde dit pakket 3.125 gebruikers.
Op 1 januari 2025 telde dit pakket 32.768 gebruikers.
Het aantal gebruikers van dit pakket groeide exponentieel tussen 2020 en 2025.

4pt **a** Bereken algebraïsch het aantal gebruikers van dit pakket op 1 januari 2022.

4pt **b** Bereken algebraïsch het jaar en de maand waarin het aantal gebruikers van dit pakket gelijk was aan 20.000.

In 2024 introduceerde BREF een nieuw softwarepakket, genaamd JAMES, dat op termijn BUTLER moet vervangen. BREF heeft onderzoek laten doen naar de effecten van deze introductie op het aantal gebruikers van beide pakketten.
Volgens de onderzoekers zal het aantal gebruikers van BUTLER in eerste instantie blijven toenemen, maar later afnemen. Het voorspelde aantal gebruikers wordt gegeven door

$$N_B = (t+1) \cdot \mathrm{e}^{3{,}5-0{,}4t}$$

In deze formule is N_B het voorspelde aantal gebruikers van BUTLER in duizenden en is t de tijd in jaren, met $t = 0$ op 1 januari 2025.

5pt **c** Bereken algebraïsch het tijdstip waarop het voorspelde aantal gebruikers van BUTLER maximaal is.

Volgens de onderzoekers wordt het voorspelde aantal gebruikers van JAMES gegeven door

$$N_J = 5(10 - 9 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}1t})$$

In deze formule is N_J het voorspelde aantal gebruikers van JAMES in duizenden en is t weer de tijd in jaren, met $t = 0$ op 1 januari 2025.

4pt **d** Bereken algebraïsch het tijdstip waarop het voorspelde aantal gebruikers van JAMES gelijk is aan 20.000.

Einde van het tentamen.

Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of ***uw naam*** *en het* ***opgavenummer*** *op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

Wat er ***niet*** *in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\ldots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g=\mu_T-1{,}645\sigma_T$	$g=\mu_T+1{,}645\sigma_T$	$g_l=\mu_T-1{,}96\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+1{,}96\sigma_T$
0,01	$g=\mu_T-2{,}33\sigma_T$	$g=\mu_T+2{,}33\sigma_T$	$g_l=\mu_T-2{,}58\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+2{,}58\sigma_T$

