# Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 17 april 2025

## *Vraag 1a - 5 punten*

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 + 7x = x^2 + 3x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot -5}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{56}}{4}$

Het verschil van de *x*-coördinaten van de snijpunten is

$\dfrac{-4+\sqrt{56}}{4} - \dfrac{-4-\sqrt{56}}{4} = -\dfrac{4}{4} + \dfrac{\sqrt{56}}{4} - \left(-\dfrac{4}{4} - \dfrac{\sqrt{56}}{4}\right) = -1 + \dfrac{\sqrt{56}}{4} + 1 + \dfrac{\sqrt{56}}{4} = \dfrac{\sqrt{56}}{2} \left(= \sqrt{14}\right) \approx 3{,}7417$

## *Vraag 1b - 7 punten*

$h'(x) = \dfrac{1 \cdot (2x-1) - (x-3) \cdot 2}{(2x-1)^2} = \dfrac{2x - 1 - 2x + 6}{(2x-1)^2} = \dfrac{5}{(2x-1)^2}$

$h'(x) = 5 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 1$

Dit geeft $2x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ of $2x - 1 = -1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

of $(2x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

$h(0) = \frac{-3}{-1} = 3$, $h(1) = \frac{-2}{1} = -2$, het verschil tussen de *y*-waarden is dus $3 - (-2) = 5$

## *Vraag 1c - 5 punten*

$32^x = 8^{x-1} \Leftrightarrow 32^x = 8^x \cdot 8^{-1} \Leftrightarrow 32^x = \frac{1}{8} \cdot 8^x \Leftrightarrow \left(\frac{32^x}{8^x}\right) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{32}{8}\right)^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4^x = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow (2^2)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{-3} \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ of $x = {}^4\log\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{2}$

*Alternatief:*

$32^x = 8^{x-1} \Leftrightarrow (2^5)^x = (2^3)^{x-1} \Leftrightarrow 2^{5x} = 2^{3x-3} \Leftrightarrow 5x = 3x - 3 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

## *Vraag 2a - 2 punten*

De kosten in euro's voor het traject van $A$ direct naar $C$ zijn $\sqrt{45} \times 50\,000 \approx 335\,410$
De kosten in euro's voor het traject van $A$ via $B$ naar $C$ zijn $6 \times 40\,000 + 3 \times 50\,000 = 390\,000$
Het directe traject heeft dus de laagste kosten

## *Vraag 2b - 8 punten*

$\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} = 4 + 5 \cdot \dfrac{2x - 12}{2\sqrt{x^2 - 12x + 45}} = 4 + 5 \cdot \dfrac{x - 6}{\sqrt{x^2 - 12x + 45}} = 4 + \dfrac{5x - 30}{\sqrt{x^2 - 12x + 45}}$

$\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x - 30}{\sqrt{x^2 - 12x + 45}} = -4 \Leftrightarrow 5x - 30 = -4\sqrt{x^2 - 12x + 45}$

Kwadrateren geeft

$(5x - 30)^2 = 16(x^2 - 12x + 45) \Leftrightarrow 25x^2 - 300x + 900 = 16x^2 - 192x + 720$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 108x + 180 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-10) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 10$

*Mag uiteraard ook met de abc-formule.*

$x = 10$ geeft $\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} = 4 + \frac{20}{\sqrt{25}} = 8$, de enige oplossing die voldoet is $x = 2$

*Mag ook met:* $x = 10$ *geeft duidelijk een omweg met hogere kosten, of met; P ligt tussen A en B, dus de formule geldt alleen voor* $0 < x < 6$.

$x = 2$ geeft $K = 4 \cdot 2 + 5 \cdot \sqrt{4 - 24 + 45} = 8 + 5\sqrt{25} = 33$, de kosten zijn dan 330 000 euro

*Vraag 3a - 5 punten*

$P(X=10)=0{,}8^{10}\approx 0{,}1074$; $P(X=9)=\binom{10}{1}\cdot 0{,}8^9\cdot 0{,}2^1=10\cdot 0{,}8^9\cdot 0{,}2\approx 0{,}2684$

*Vraag 3b - 2 punten*

$P(X<9)=P(X\leq 8)=1-\big(P(X=9)+P(X=10)\big)$

$\approx 1-(0{,}2684+0{,}1074)=1-0{,}3758=0{,}6242\approx 0{,}62$

*Mag ook met* $1-\big(P(X=9)+P(X=10)\big)\approx 1-(0{,}27+0{,}11)=1-0{,}38=0{,}62$

*Vraag 3c - 4 punten*

De kosten voor de desserts noteren we met $K$.

$X\leq 8$ geeft $K=8\times 5=40$; $X=9$ geeft $K=40+9=49$; $X=10$ geeft $K=40+2\cdot 9=58$

$E(K)=40\cdot P(K=40)+49\cdot P(K=49)+58\cdot P(K=58)$

$=40\cdot P(X\leq 8)+49\cdot P(X=9)+58\cdot P(X=10)\approx 40\cdot 0{,}6242+49\cdot 0{,}2684+58\cdot 0{,}1074=44{,}3488$

*Mag ook met* $40\cdot 0{,}62+49\cdot 0{,}27+58\cdot 0{,}11=44{,}41$

*Vraag 3d - 4 punten*

Voor de drie overgebleven desserts geldt:

$P(eerste\ banaan, tweede\ aardbei, derde\ aardbei)=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}$

Bij deze manier van rekenen kunnen ook het tweede en het derde dessert met banaan zijn

De kans dat één van de overgebleven desserts met banaan en de andere twee met aardbei zijn is dus $\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}=3\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{5}{12}\approx 0{,}4167$

*Kan ook met* $\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{5\cdot 10}{120}=\frac{5}{12}$

*Alternatief:*

Als er precies één dessert met banaan overblijft, worden er 4 desserts met banaan en 3 desserts met aardbei gekozen

De kans hierop is $\frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{5}{3}}{\binom{10}{7}}=\frac{5\cdot 10}{120}=\frac{5}{12}$

*Vraag 4a - 5 punten*

Aflezen uit de figuur: De maximumwaarde van $H$ is 120 cm en de minimale waarde van $H$ is 30 cm.

Dit geeft $a=evenwichtsstand=\frac{120+30}{2}=75$

$b=amplitude=120-75=45\quad\left(=\frac{120-30}{2}=75-30\right)$

De periode is 12 uur (bijvoorbeeld de afstand tussen twee opeenvolgende maxima)

$periode=\frac{2\pi}{c}\Leftrightarrow c=\frac{2\pi}{periode}=\frac{2\pi}{12}=\frac{1}{6}\pi$

De grafiek gaat op $t=0$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $d=0$

*Ook:* De grafiek gaat op $t=12$ stijgend door de evenwichtsstand, dus $d=12$

### *Vraag 4b - 4 punten*

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

$H$ is voor het eerst maximaal op $\frac{1}{4}$ periode nadat $H$ voor het eerst door de evenwichtsstand gaat, dat is als $t = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{4} \cdot 4\pi = 1\frac{1}{3}\pi$

De eerste drie tijdstippen na $t = 0$ waarop $H$ maximaal is, zijn dus
$t = 1\frac{1}{3}\pi$, $t = 1\frac{1}{3}\pi + 4\pi = 5\frac{1}{3}\pi$ en $t = 5\frac{1}{3}\pi + 4\pi = 9\frac{1}{3}\pi$

*Alternatief:*

$H$ is maximaal als $\sin\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{3}\pi\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

$\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow t - \frac{1}{3}\pi = \pi \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}\pi$

De periode is $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

De eerste drie tijdstippen na $t = 0$ waarop $H$ maximaal is, zijn dus
$t = \frac{4}{3}\pi = 1\frac{1}{3}\pi$, $t = 1\frac{1}{3}\pi + 4\pi = 5\frac{1}{3}\pi$ en $t = 5\frac{1}{3}\pi + 4\pi = 9\frac{1}{3}\pi$

### *Vraag 5a - 6 punten*

*T*, het totale gewicht van deze twee personen, is normaal verdeeld met $\mu_T = 82 + 73 = 155$ en $\sigma_T = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$, dus $160 = \mu_T + \frac{1}{2}\sigma_T$

In de figuur ligt $0{,}150 + 0{,}136 + 0{,}023 = 0{,}309$ deel van de verdeling boven $\mu + \frac{1}{2}\sigma$

De kans dat deze twee personen samen meer dan 160 kg wegen is dus 0,309

### *Vraag 5b - 2 punten*

$H_0$: $\mu = 82$; $H_1$: $\mu \neq 82$

### *Vraag 5c - 5 punten*

De toetsingsgrootheid $G$ is normaal verdeeld met $\mu_G = 82$ en $\sigma_G = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0{,}8$

Bij deze tweezijdige toetsingsprocedure met $\alpha = 0{,}05$ is de rechtergrenswaarde van het kritieke gebied $g = \mu_G + 1{,}96\sigma_G = 82 + 1{,}96 \cdot 0{,}8 = 83{,}568$

De steekproefuitkomst 83,5 is kleiner dan deze grenswaarde

De nulhypothese wordt daarom niet verworpen

*Alternatief:*

De toetsingsgrootheid $G$ is normaal verdeeld met $\mu_G = 82$ en $\sigma_G = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0{,}8$

De steekproefuitkomst 83,5 ligt 1,5 kg boven $\mu_G$, dat is $\frac{1{,}5}{0{,}8}\sigma_G = 1{,}875\sigma_G$

Bij een tweezijdige toets met $\alpha = 0{,}05$ wordt de nulhypothese niet verworpen als de steekproefuitkomst minder dan $1{,}96\sigma_G$ van $\mu_G$ ligt en dat is hier het geval

## *Vraag 6a - 4 punten*

De groeifactor over vijf jaar is $\frac{32768}{3125} = 10{,}48576$

De groeifactor over één jaar is dus $10{,}48576^{\frac{1}{5}} = 1{,}6$
Het aantal gebruikers 2 jaar na 1-1-2020 is dus $3125 \cdot 1{,}6^2 = 8000$

*Kan ook in één keer berekend worden:* $3125 \cdot \left(\frac{32768}{3125}\right)^{\frac{2}{5}} = 8000$

## *Vraag 6b - 4 punten*

Het aantal gebruikers wordt gegeven door $N = 3125 \cdot 1{,}6^t$ met $t$ in jaren en $t = 0$ op 1-1-2020
$N = 20000 \Leftrightarrow 3125 \cdot 1{,}6^t = 20000 \Leftrightarrow 1{,}6^t = 6{,}4 \Leftrightarrow t = {}^{1,6}\log(6{,}4) \approx 3{,}95$
3,95 jaar na 1 januari 2020 is in december 2023

## *Vraag 6c - 5 punten*

$\frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}t} = 1 \cdot \mathrm{e}^{3,5-0,4t} + (t+1) \cdot [\mathrm{e}^{3,5-0,4t}]' = 1 \cdot \mathrm{e}^{3,5-0,4t} + (t+1) \cdot -0{,}4\mathrm{e}^{3,5-0,4t} = (0{,}6 - 0{,}4t) \cdot \mathrm{e}^{3,5-0,4t}$
$\mathrm{e}^{3,5-0,4t} \neq 0$, dus $\frac{\mathrm{d}N_B}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow 0{,}6 - 0{,}4t = 0 \Leftrightarrow 0{,}4t = 0{,}6 \Leftrightarrow t = \frac{6}{4} = 1{,}5$

## *Vraag 6d - 4 punten*

Merk op dat $N_J$ in duizenden is, dus op te lossen is $N_J = 20$
$\Leftrightarrow 5(10 - 9 \cdot \mathrm{e}^{-0,1t}) = 20 \Leftrightarrow 10 - 9 \cdot \mathrm{e}^{-0,1t} = 4 \Leftrightarrow -9\mathrm{e}^{-0,1t} = -6 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,1t} = \frac{2}{3}$
Dit geeft $-0{,}1t = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0{,}1} \approx 4{,}0547$

 