CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Voorbeeldtentamen Wiskunde A

Datum: Najaar 2018
Tijd: 3 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	4	4	4	5	4	3
b	4	4	2	4	4	3
c	4	4	3		4	5
d	5	6	3		5	3
e					3	
Totaal	17	18	12	9	20	14

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{10} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche berekeningen

Bron: CCVX voortentamen wiskunde A juli 2018

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening.*
De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.

Los onderstaande vergelijkingen algebraïsch op en geef als er een wortel of een logaritme in uw antwoord staat, een benadering van uw antwoord afgerond op drie cijfers achter de decimale komma.

4pt a $9x^3 + 3x^2 = 2x$

4pt b $3 \cdot 5^x + 14 = 10 \cdot 5^x$

De functie f wordt gegeven door

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

4pt c Bereken algebraïsch de helling van de grafiek van f in het punt $\left(1, \frac{1}{3}\right)$.

5pt d Bereken algebraïsch de coördinaten van het (de) snijpunt(en) van de grafiek van f met de lijn $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

Opgave 2 – Maximale winst

Bron: CCVX voortentamen wiskunde A juli 2018

Bert produceert en verkoopt souvenirs van de Utrechtse Domtoren. Het aantal souvenirs dat hij per dag produceert hangt alleen af van het geld dat hij investeert in het produceren van deze souvenirs. Dit aantal wordt gegeven door

$$Q(I) = \sqrt{5I - 10}$$

met I het geïnvesteerde geld (de investering) in euro's.

De prijs waarbij alle souvenirs verkocht worden hangt af van het aantal souvenirs dat hij produceert. Deze prijs (in euro's) wordt gegeven door

$$P(Q) = 20 - \tfrac{1}{5}Q$$

Bert besluit om deze formule te gebruiken om de verkoopprijs te bepalen.
De opbrengst uit de verkoop van deze souvenirs wordt dan gegeven door

$$R = QP = Q(20 - \tfrac{1}{5}Q)$$

4pt a Gebruik de afgeleide $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$ om algebraïsch het aantal souvenirs te berekenen waarbij de opbrengst maximaal is.

4pt b Bereken algebraïsch de investering van Bert als de verkoopprijs van de souvenirs 12 euro is.

Bovenstaande formules kunnen worden gecombineerd tot één formule die de winst (in euro's) van Bert geeft als functie van zijn investering (in euro's). Deze functie wordt gegeven door de formule

$$W(I) = 2 - 2I + 20\sqrt{5I - 10}$$

4pt c Toon aan dat deze formule correct is door de daarboven gegeven formules te substitueren in de formule $Winst = Opbrengst - Investering$

6pt d Bereken de maximale winst algebraïsch.

Opgave 3 – Tonic

Bron: CCVW voortentamen wiskunde A december 2017 (aangepast)

Het bedrijf Royal Pub produceert literflessen tonic. Het volume van de inhoud van deze flessen is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu_V = 1040$ ml en standaard-afwijking $\sigma_V = 23$ ml.

De dichtheid van de tonic is 1,087 g/ml . Dat betekent dat het gewicht van de inhoud van de flessen normaal verdeeld is met gemiddelde $\mu_G = 1130{,}5$ g en standaard-afwijking $\sigma_G = 25{,}0$ g.

De flessen zijn van plastic gemaakt. Het gewicht van lege flessen is normaal verdeeld met gemiddelde $\mu_F = 90{,}5$ g en standaardafwijking $\sigma_F = 3{,}0$ g.

4pt a Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een gevulde fles tonic.

Regelmatig wordt er gecontroleerd of de gemiddelde vulinhoud van de flessen tonic nog steeds 1040 ml is. Dit wordt getoetst door de gemiddelde vulinhoud te bepalen bij een steekproef van 100 flessen. Daarbij neemt men aan dat de standaardafwijking nog steeds 23 ml bedraagt en men neemt als significantieniveau $\alpha = 5\%$.

2pt b Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

De gemiddelde vulinhoud van de 100 flessen in de steekproef blijkt 1036 ml te zijn. De bijbehorende overschrijdingskans is 0,041.

3pt c Geef de parameters van de toetsingsgrootheid waarmee deze overschrijdingskans is berekend.

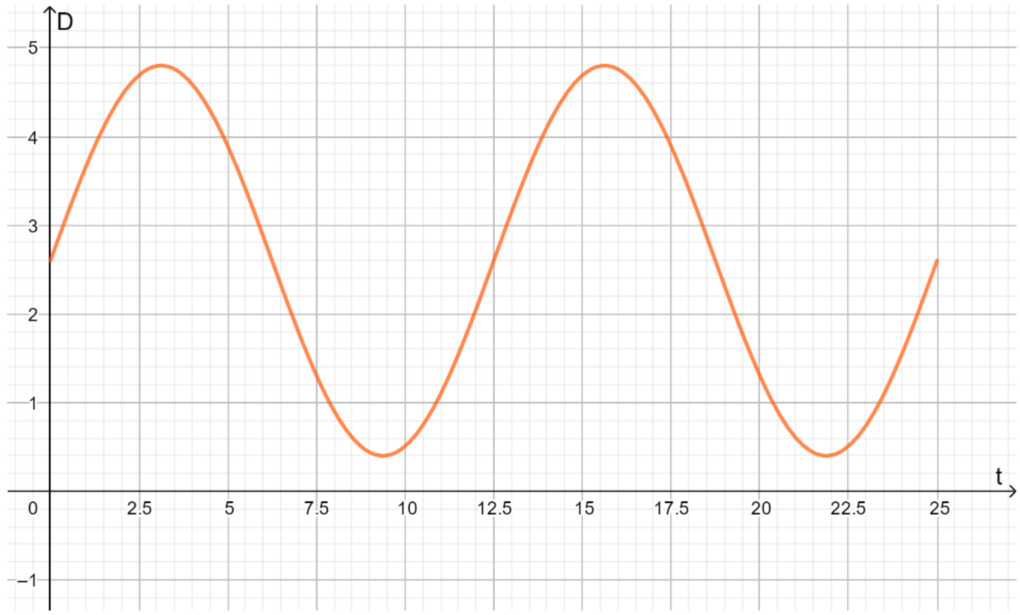
3pt d Wat is de uitkomst van de toetsingsprocedure bij deze steekproefuitkomst? Motiveer uw antwoord!

Opgave 4 – Getij in een haven

Bron: CCVX voortentamen wiskunde A juli 2018

Het getij is de periodieke wisseling van de waterstand, en de daarmee samenhangende getijstroom, die op Aarde optreedt als gevolg van de zwaartekracht van de Maan en, in mindere mate, die van de Zon.

Als gevolg van dit fenomeen varieert de diepte van de haven van Sinusstad in de loop van de tijd. Voor de eerste 25 uur van augustus 2018 wordt *D*, de diepte van de haven in meters, als functie van *t*, de tijd in uren, weergegeven in de figuur hieronder.



De functie waarvan de grafiek in de figuur hierboven is weergegeven heeft een functievoorschrift van de vorm

$$D(t) = A + B\sin(Ct)$$

5pt **a** Bepaal waarden van *A*, *B* en *C* die bij bovenstaande beschrijving passen.

Om middernacht in de nacht van 1 augustus op 2 augustus is de diepte van de haven 1,54 m.

4pt **b** Bereken algebraïsch de andere tijdstippen op 2 augustus waarop de diepte van de haven 1,54 m is. Neem daarbij aan dat de grafiek op dezelfde manier doorloopt voor de volgende dag.

Opgave 5 – Drie groeimodellen

Bron: CCVX voortentamen wiskunde A juli 2018 (aangepast)

Op een grote universiteitscampus komen drie studenten samen terug van een buitenlandse reis. Op die reis hebben ze een zeer besmettelijke, maar verder ongevaarlijke ziekte opgelopen. Wie deze ziekte oploopt, heeft een paar dagen last van wat kleine ongemakken, maar heeft daarna geen ziekteverschijnselen meer. Maar hij of zij blijft wel zijn of haar hele leven drager van deze ziekte.
Twee dagen nadat de drie studenten zijn teruggekomen, zijn er 48 studenten drager van deze ziekte en vier dagen na hun terugkomst zijn dat er 768.

4pt a Is er een **lineair** groeimodel dat bij deze cijfers past?
Zo nee, leg uit waarom niet, zo ja, bereken het aantal studenten dat volgens dit model drie dagen nadat de drie studenten teruggekomen zijn drager is van deze ziekte.

4pt b Is er een **exponentieel** groeimodel dat bij deze cijfers past?
Zo nee, leg uit waarom niet, zo ja, bereken het aantal studenten dat volgens dit model drie dagen nadat de drie studenten teruggekomen zijn drager is van deze ziekte.

Zowel in een lineair als in een exponentieel groeimodel zal het aantal studenten dat drager is van de ziekte op den duur boven iedere grens uitstijgen. Daarom wordt een derde groeimodel bestudeerd. Volgens dit derde groeimodel wordt het aantal dragers van de ziekte vanaf vier dagen na de terugkeer van de drie studenten bij benadering gegeven door

$$N(t) = 5000 \cdot (3 - 4\mathrm{e}^{-0{,}085t})$$

In deze formule is t de tijd in dagen met $t = 0$ op de dag dat de drie studenten op de campus teruggekeerd zijn en is $N(t)$ het aantal studenten dat drager is van deze ziekte.

4pt c Bereken de groeisnelheid van het aantal studenten dat drager is van de ziekte volgens dit derde model op $t = 4$. (groeisnelheid = afgeleide groeifunctie).

5pt d Bereken algebraïsch het tijdstip waarop er volgens deze formule 10 000 studenten drager zijn van deze ziekte.
Geef het antwoord afgerond op hele uren.

Er wonen 20 000 studenten op de campus.

3pt e Hoeveel van deze studenten zullen op den duur volgens deze formule **geen** drager zijn van deze ziekte?

Opgave 6 – Vakantiebungalows

Bron: CCVX voortentamen wiskunde A juli 2018 (aangepast)

RJ is de eigenaar van een klein vakantiepark met 18 bungalows. In de laatste week van juli is de vraag naar deze bungalows zo groot, dat hij alle bungalows die hij aanbiedt ook verhuurt. Uit ervaring weet hij echter dat 10% van de huurders niet verschijnt. Daarom overweegt hij om 20 bungalows te verhuren. In dat geval moet hij, als er 19 of 20 huurders verschijnen, alternatieve huisvesting regelen voor één of twee huurders en hun gezin. In deze vraag nemen we aan dat de huurders onafhankelijk van elkaar verschijnen.

3pt **a** Bereken de kans dat er precies 18 huurders verschijnen als hij 20 bungalows verhuurt.

3pt **b** Toon aan dat de kans dat 19 van de 20 huurders verschijnen gelijk is aan 0,2702 en dat de kans dat alle 20 huurders verschijnen gelijk is aan 0,1216 (afgerond op vier decimalen).

Iedere huurder moet de volledige huur van 2000 euro per week vooraf betalen. Dat betekent dat RJ een opbrengst van 40 000 euro heeft als hij 20 bungalows verhuurt. Hij moet echter voor iedere huurder die hij niet kan huisvesten in zijn 18 bungalows 4000 euro betalen om alternatieve huisvesting te regelen.

5pt **c** Onderzoek wat naar verwachting meer opbrengt: 18 bungalows verhuren, waardoor hij extra inkomsten mist als er tenminste twee huurders niet komen opdagen, of 20 bungalows verhuren met het risico dat hij voor alternatieve huisvesting moet betalen als er 19 of 20 huurders verschijnen.

Een andere mogelijkheid is natuurlijk om 19 bungalows te verhuren.

3pt **d** Bereken de verwachte netto opbrengst voor RJ bij deze mogelijkheid.

Einde van het tentamen.

Staat uw naam op alle in te leveren blaadjes?

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\ldots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g=\mu_T-1{,}645\sigma_T$	$g=\mu_T+1{,}645\sigma_T$	$g_l=\mu_T-1{,}96\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+1{,}96\sigma_T$
0,01	$g=\mu_T-2{,}33\sigma_T$	$g=\mu_T+2{,}33\sigma_T$	$g_l=\mu_T-2{,}58\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+2{,}58\sigma_T$

Meer oefenopgaven

Van het Centraal Examen vwo Wiskunde A 2018, tijdvak 2 is het rekenwerk bij veel vragen vergelijkbaar met het voortentamen wiskunde A van de CCVX:

Met uitzondering van vragen 9 en 22 geldt dat iets soortgelijks gevraagd zou kunnen worden, maar wel met minder begeleidende tekst. Bij vraag 3 zou ook gevraagd kunnen worden om dit aantal te berekenen met behulp van de formule.

Vragen 9 en 22 zijn lastig/onmogelijk zonder grafische rekenmachine en zullen dus niet op die manier gesteld worden.

Je kunt dit examen vinden op www.examenblad.nl .

Daarnaast is de onderstaande opgave uit het CCVX voortentamen Wiskunde A van juli 2018 nog actueel:

Extra opgave – Een moeilijk tentamen?

Een tentamen bestaat uit 10 meerkeuzevragen en 4 open vragen. De tijd die kandidaten die zich goed voorbereid hebben nodig hebben om een meerkeuzevraag te beantwoorden is normaal verdeeld met een gemiddelde van 5 minuten en een standaardafwijking van 1 minuut. De tijd die zij nodig hebben om een open vraag te beantwoorden is normaal verdeeld met een gemiddelde van 15 minuten en een standaardafwijking van 3 minuten. In deze opgave nemen we aan dat de tijd die een kandidaat nodig heeft voor het beantwoorden van een vraag onafhankelijk is van de tijd die hij nodig heeft voor het beantwoorden van andere vragen.

De totale tijd die een kandidaat die zich goed voorbereid heeft nodig heeft om alle vragen te beantwoorden, is een normaal verdeelde toevalsvariabele *X*.

5pt a Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van *X*.

3pt b Hoeveel procent van deze kandidaten heeft volgens de vuistregels meer dan 6 minuten nodig voor het beantwoorden van een meerkeuzevraag?

Na het tentamen klagen de studenten erover dat dit tentamen veel moeilijker is dan dat van vorig jaar. De examencommissie besluit om dit te toetsen door de tentamens van 50 kandidaten na te kijken en het slagingspercentage te vergelijken met dat van vorig jaar, dat 80% was. Ze nemen daarbij als significantieniveau $\alpha = 5\%$.

2pt c Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

6pt d Wat is het resultaat van deze toetsingsprocedure als 36 van deze 50 kandidaten voor het tentamen slagen?