CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 16 december 2024
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:						
Opgave	1	2	3	4	5	6
a b c d e	4 6 5	3 3 4 3 3	6 3	4 4 4 4	6 1 5	4 4 3 2
Totaal	15	16	9	16	12	13

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$*.*
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^4 + x^3 - 30x^2$.

4pt a Bereken algebraïsch de *x*-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de *x*-as.

De functie g wordt gegeven door

$$g(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 3}$$

6pt b Bereken algebraïsch de coördinaten van de punten op de grafiek van g waarin de raaklijn aan deze grafiek horizontaal loopt.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = 5 \cdot 4^{x+2} + 25$.

5pt c Bereken algebraïsch de waarde van x waarvoor geldt $h(x) = 225$.
Geef het antwoord afgerond op twee cijfers achter de komma.

Opgave 2 – Winstgevende zomerjurken

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een modeontwerpster presenteert regelmatig nieuwe ontwerpen voor zomerjurken, die zij vervolgens op bestelling produceert. Het aantal bestellingen Q van een ontwerp is uitsluitend afhankelijk van de prijs in euro's P. Hiervoor geldt de formule

$$Q = \sqrt{90\,000 - P^2}$$

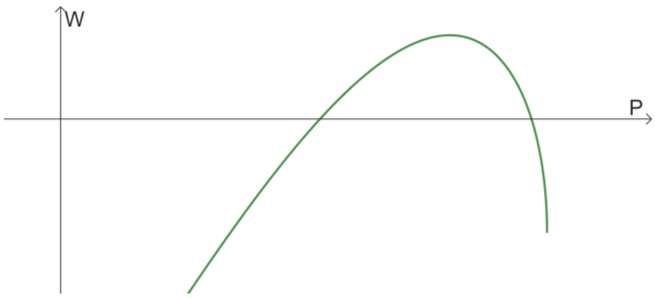
De kosten in euro's K voor het ontwerpen en produceren van de jurken zijn afhankelijk van het aantal geproduceerde jurken, dat zoals gezegd gelijk is aan het aantal bestelde jurken Q. Hiervoor geldt de formule

$$K = 35 \cdot (400 + 3Q)$$

De winst in euro's W van de ontwerpster op een ontwerp, dat is de opbrengst van de verkoop van de jurken $(= PQ)$ minus de kosten voor het ontwerpen en produceren, wordt gegeven door

$$W = (P - 105) \cdot \sqrt{90\,000 - P^2} - 14\,000$$

In de figuur hieronder ziet u een deel van de grafiek die het verband tussen W en P weergeeft.



3pt **a** Laat zien hoe de formule voor W volgt uit de formules voor Q en K.

3pt **b** Bereken algebraïsch de winst als er 84 jurken besteld worden.

De afgeleide van de winstfunctie kan geschreven worden als

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}P} = \frac{90\,000 - 2P^2 + 105P}{\sqrt{90\,000 - P^2}}$$

4pt **c** Toon dit aan.

3pt **d** Bereken algebraïsch de prijs waarbij de winst op een ontwerp maximaal is.

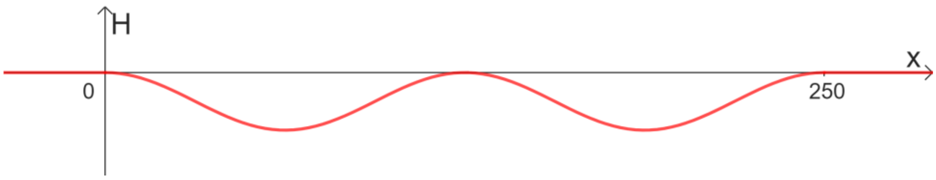
3pt **e** Wat is de maximaal mogelijke prijs die de modeontwerpster volgens bovenstaande formules voor een jurk kan vragen?

Opgave 3 – Een omgekeerde verkeersdrempel

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In sommige fietspaden ligt, om de snelheid van de fietsers te beperken, een dubbele uitholling, die werkt als een omgekeerde verkeersdrempel.
Hiernaast ziet u zo'n uitholling op het Statenpad in Ede.

Deze dubbele uitholling heeft de vorm van een sinusfunctie. De afstand tussen het begin en het eind van de dubbele uitholling is 250 cm.
De diepste punten van de dubbele uitholling liggen op 20 cm onder het originele niveau van het fietspad. Zie de figuur hieronder.



Bij deze figuur past een formule van de vorm $H = a + b\sin(c(x-d))$
met H en x in cm.

6pt a Bereken algebraïsch de waarden van a, b, c en d in deze formule.

Als $x = 15{,}8$ ligt het fietspad 3,0 cm onder zijn originele niveau.

3pt b Bereken algebraïsch de andere drie waarden van x waarvoor geldt dat het fietspad 3,0 cm onder zijn originele niveau ligt.

Opgave 4 – Chocoladereepjes

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een supermarkt verkoopt mini chocoladereepjes in zakjes. In ieder zakje zitten 4 reepjes melkchocolade, 3 reepjes pure chocolade en 2 reepjes witte chocolade.

Erik koopt één van deze zakjes en hij eet drie willekeurige reepjes uit dit zakje op.

4pt a Bereken de kans dat Erik precies één reepje van iedere soort opeet.

4pt b Bereken de kans dat Erik tenminste één reepje witte chocolade opeet.

Martin koopt 10 van deze zakjes en hij eet één willekeurig reepje uit elk van deze 10 zakjes op.

4pt c Bereken de kans dat Martin precies 5 reepjes melkchocolade opeet.

4pt d Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van het aantal reepjes witte chocolade dat Martin opeet.

Meer over deze chocoladereepjes in opgave 5 op de volgende pagina.

Opgave 5 – Het gewicht van de chocoladereepjes

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

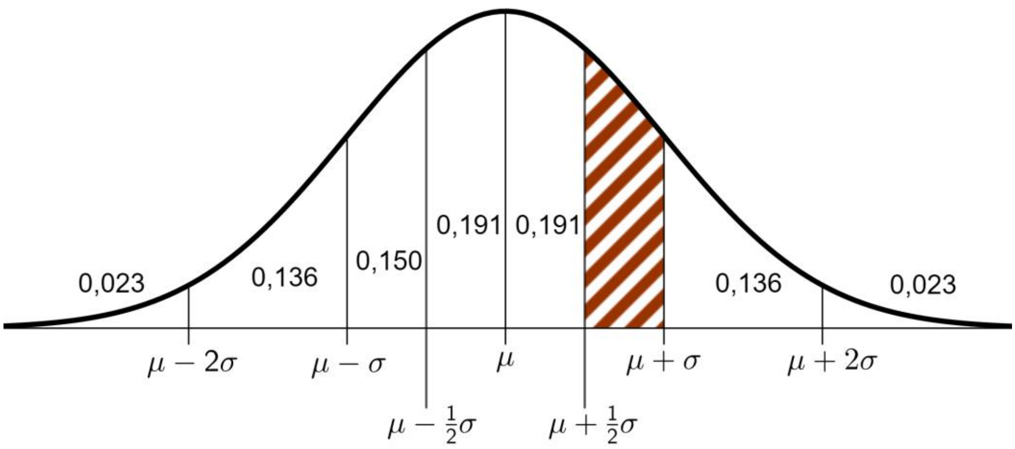
Volgens de supermarkt is het gewicht van alle soorten chocoladereepjes uit opgave 4 normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 21{,}0$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 0{,}5$ g.

6pt a Gebruik de figuur onderaan deze pagina om, uitgaande van de bewering van de supermarkt, te berekenen hoeveel procent van de zakken met 9 chocoladereepjes een totaalgewicht heeft van meer dan $190{,}5$ g.

Een consumentenorganisatie vermoedt dat het gemiddelde gewicht van de chocoladereepjes lager is dan 21 g. Om dit te toetsen weegt de consumentenorganisatie 9 willekeurig geselecteerde chocoladereepjes.
Bij deze toetsingsprocedure neemt men een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0{,}05$ en neemt men aan dat de standaardafwijking van het gewicht van één chocoladereepje gelijk is aan $\sigma = 0{,}5$ g.

1pt b Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

5pt c Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure als het gemiddelde gewicht van deze 9 chocoladereepjes gelijk is aan $20{,}5$ g ?



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$.

Opgave 6 – Het zoutgehalte van het IJsselmeer

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Het IJsselmeer is in 1932 ontstaan door de afsluiting van de Zuiderzee met de Afsluitdijk. Vanaf dat moment nam de zoutconcentratie in het IJsselmeer geleidelijk af. Deze zoutconcentratie wordt goed benaderd door de formule

$$C = \frac{58\mathrm{e}^{-t} + 1}{10}$$

In deze formule is C de zoutconcentratie in kg/m^3 en is t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1932.

4pt a Bereken algebraïsch het percentage waarmee de zoutconcentratie in het IJsselmeer afnam in het eerste jaar na de afsluiting van de Zuiderzee.

4pt b Bereken algebraïsch het tijdstip waarop de zoutconcentratie in het IJsselmeer gelijk was aan 3 kg/m^3.

3pt c Bereken algebraïsch de snelheid in kg/m^3 per jaar waarmee de zoutconcentratie afnam op $t = 2$.

Na een aantal jaren is de zoutconcentratie in het IJsselmeer gelijk geworden aan de zoutconcentratie in de IJssel, de belangrijkste rivier die uitmondt in het IJsselmeer.

2pt d Bereken algebraïsch de zoutconcentratie in de IJssel, dat is dus de zoutconcentratie in het IJsselmeer na een aantal jaren.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ g \neq 1,\ a > 0,\ p > 0,\ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$

