Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 16-12-2024

Vraag 1a - 4 punten

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 30x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + x - 30) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-5)(x+6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5 \vee x = -6$

Mag uiteraard ook met $x = 0 \vee x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot30}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{121}}{2} = \frac{-1\pm11}{2}$

Vraag 1b - 6 punten

$$g'(x) = \frac{2(x^2+2x+3)\ -\ (2x+3)(2x+2)}{(x^2+2x+3)^2}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x^2+2x+3) - (2x+3)(2x+2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 6 - (4x^2 + 10x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 6 - 4x^2 - 10x - 6 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x(-2x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$

$g(0) = \frac{3}{3} = 1,\ \ g(-3) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

Vraag 1c - 5 punten

$h(x) = 225 \Leftrightarrow 5 \cdot 4^{x+2} + 25 = 225 \Leftrightarrow 5 \cdot 4^{x+2} = 200 \Leftrightarrow 4^{x+2} = 40$

Dit geeft $x + 2 = {}^4\log(40) \Leftrightarrow x = {}^4\log(40) - 2 \approx 0{,}66$

Alternatief:

$h(x) = 225 \Leftrightarrow 5 \cdot 4^{x+2} + 25 = 225 \Leftrightarrow 5 \cdot 4^x \cdot 4^2 + 25 = 225 \Leftrightarrow 5 \cdot 4^x \cdot 16 + 25 = 225$

$\Leftrightarrow 80 \cdot 4^x + 25 = 225 \Leftrightarrow 80 \cdot 4^x = 200 \Leftrightarrow 4^x = 2{,}5$

Dit geeft $x = {}^4\log\,(2{,}5) \approx 0{,}66$

Vraag 2a - 3 punten

$W = opbrengst - kosten = PQ - 35(400 + 3Q)$

$= PQ - 14\,000 - 105Q = PQ - 105Q - 14\,000 = (P - 105)Q - 14\,000$

$= (P - 105) \cdot \sqrt{90\,000 - P^2} - 14\,000$

Vraag 2b - 3 punten

$Q = 84 \Leftrightarrow \sqrt{90\,000 - P^2} = 288 \Leftrightarrow 90\,000 - P^2 = 84^2$

$\Leftrightarrow P^2 = 90\,000 - 84^2 = 90\,000 - 7056 = 82\,944 \Rightarrow P = \sqrt{82\,944} = 288$

Dit geeft $W = (288 - 105) \cdot 84 - 14\,000 = 1372$

Vraag 2c - 4 punten

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}P} = \sqrt{90\,000 - P^2} + (P - 105) \cdot \frac{-2P}{2\sqrt{90\,000 - P^2}} = \sqrt{90\,000 - P^2} - \frac{(P - 105)P}{\sqrt{90\,000 - P^2}}$$

$$= \frac{90\,000 - P^2}{\sqrt{90\,000 - P^2}} - \frac{P^2 - 105P}{\sqrt{90\,000 - P^2}} = \frac{90\,000 - P^2 - P^2 + 105P}{\sqrt{90\,000 - P^2}} = \frac{90\,000 - 2P^2 + 105P}{\sqrt{90\,000 - P^2}}$$

Vraag 2d - 3 punten

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}P} = 0 \Leftrightarrow 90\,000 - 2P^2 + 105P = 0 \Leftrightarrow 2P^2 - 105P - 90\,000 = 0$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{105 \pm \sqrt{105^2 + 4 \cdot 2 \cdot 90\,000}}{2 \cdot 2} = \frac{105 \pm 855}{4}$$

De enige positieve oplossing is $P = \frac{105+855}{4} = 240$

Vraag 2e - 3 punten

De formules voor Q en W gelden alleen als $90\,000 - P^2 \geq 0$, dat is als $P^2 \leq 90\,000$

$P = \sqrt{90\,000} = 300$ is dus de maximaal mogelijke waarde voor P

Vraag 3a - 6 punten

$a = evenwichtsstand = \frac{-20}{2} = -10$; $b = amplitude = \frac{20}{2} = 10$

$periode = \dfrac{250}{2} = 125$

$periode = \dfrac{2\pi}{c} \Leftrightarrow c = \dfrac{2\pi}{periode} = \dfrac{2\pi}{125} = 0{,}016\pi$

De grafiek gaat op $\frac{3}{4}$ periode stijgend door de evenwichtsstand, dus $d = \frac{3}{4} \cdot 125 = 93{,}75$

Ook goed: de sinusoïde gaat op $\frac{1}{4}$ periode voor $t = 0$ door de evenwichtsstand.

Dit geeft $d = -\frac{1}{4} \cdot 125 = -31{,}25$.

Kan ook met $0{,}016\pi(0 - d) = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow d = -\frac{0{,}5}{0{,}016} = -31{,}25$

Vraag 3b - 3 punten

1 periode na $x = 15{,}8$ is H ook gelijk aan $-3{,}0$, dat is als $x = 15{,}8 + 125 = 140{,}8$

De andere twee punten liggen 15,8 cm voor de toppen bij $x = 125$ en $x = 250$

Dat is bij $x = 125 - 15{,}8 = 109{,}2$ en bij $x = 250 - 15{,}8 = 234{,}2$

Vraag 4a - 4 punten

$P(\textit{eerste melk, tweede puur, derde wit}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$

Er zijn $3! = 6$ volgordes waarin de soorten gekozen kunnen worden, alle met dezelfde kans

De gevraagde kans is dus $6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{2}{7}$ $(\approx 0{,}2857)$

Kan ook met $\frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{84} = \frac{2}{7}$

Vraag 4b - 4 punten

$P(\textit{geen wit}) = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{12}$

$P(\textit{tenminste één wit}) = 1 - P(\textit{geen wit}) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ $(\approx 0{,}5833)$

Alternatief

$P(\textit{één wit}) = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{2}$; $P(\textit{twee wit}) = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} = \frac{1}{12}$

$P(\textit{tenminste één wit}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

Vraag 4c - 4 punten

X, het aantal melkchocoladereepjes dat Martin pakt, is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{4}{9}$

$P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^5 \approx 0{,}2313$

Vraag 4d - 4 punten

X, het aantal reepjes witte chocolade dat Martin pakt, is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = \frac{2}{9}$

$E(X) = np = 10 \cdot \frac{2}{9} = \frac{20}{9}$ $(\approx 2{,}2222)$

$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9}} \approx 1{,}3147$

Vraag 5a - 6 punten

T, het totaalgewicht van de reepjes in een zakje, is normaal verdeeld met $\mu_T = 9 \cdot 21 = 189$

$\sigma_T = \sqrt{9} \cdot 0{,}5 = 1{,}5$

$190{,}5 = \mu_T + \sigma_T$

In de figuur ligt $0{,}136 + 0{,}023 = 0{,}159$ deel van de verdeling boven $\mu + \sigma$

Dus 15,9% van de zakjes heeft een totaalgewicht van meer dan 190,5 g

Vraag 5b - 1 punt

H_0: $\mu = 21$; H_1: $\mu < 21$

Vraag 5c - 5 punten

G, het gemiddelde gewicht van de 9 reepjes, is normaal verdeeld met $\mu_G = 21$ en $\sigma_G = \frac{0,5}{\sqrt{9}} \approx 0,1667$

Bij deze linkszijdige toetsingsprocedure met $\alpha = 0,05$ is de grenswaarde van het kritieke gebied
$g = \mu_G - 1,645\sigma_G \approx 21 - 1,645 \cdot 0,1667 \approx 20,73$

De steekproefuitkomst 20,5 is kleiner dan deze grenswaarde, de nulhypothese wordt daarom verworpen

Ook: Bij een linkszijdige toets wordt de nulhypothese verworpen als de steekproefuitkomst meer dan $1,654 \cdot \sigma_G$ onder μ_G ligt en dat is hier het geval, want $21 - 20,5 = 0,5 = 3\sigma_G$

Vraag 6a - 4 punten

$t = 0$ geeft $C = \frac{58 \cdot 1 + 1}{10} = \frac{59}{10} = 5,9$; $t = 1$ geeft $C = \frac{58 \cdot \mathrm{e}^{-1} + 1}{10} \approx 2,2337$

$\frac{C_{nieuw} - C_{oud}}{C_{oud}} = \frac{2,2337 - 5,9}{5,9} \approx -0,6214$, het zoutgehalte is dus met 62,14% afgenomen

Ook: De groeifactor is $\frac{C(1)}{C(0)} \approx \frac{2,2337}{5,9} \approx 0,3786$, dat is een afname van $(1 - 0,3786) \times 100\% = 62,14\%$

Vraag 6b - 4 punten

$C = 3 \Leftrightarrow \dfrac{58\mathrm{e}^{-t} + 1}{10} = 3 \Leftrightarrow 58\mathrm{e}^{-t} + 1 = 30 \Leftrightarrow 58\mathrm{e}^{-t} = 29 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2}$

Dit geeft $-t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,69$ jaar

Vraag 6c - 3 punten

$\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = -5,8\mathrm{e}^{-t}$

$t = 2$ geeft $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = -5,8\mathrm{e}^{-2} \approx -0,7849$

De afnamesnelheid is dus 0,7849 *kg/m³ per jaar*

Vraag 6d - 2 punten

Als t groot wordt, wordt e^{-t} vrijwel 0

De zoutconcentratie in het IJsselmeer is dus na een aantal jaren $\frac{58 \cdot 0 + 1}{10} = 0,1$ kg/m³

