CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 22 juli 2024
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:						
Opgave	1	2	3	4	5	6
a b c d	5 4 4 4	4 5 5 2	4 5	5 2 4 3	4 5 4	4 6 2
Totaal	17	16	9	14	13	12

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$*.*
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x + 4$ en $g(x) = 3x + 4$.

5pt a Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

De functie h wordt gegeven door $h(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

4pt b Bereken algebraïsch de helling van de grafiek van h in het punt $(2, 3)$.

P is het snijpunt van de grafiek van h en de lijn $x + y = 3$.

4pt c Bereken algebraïsch de coördinaten van punt *P*.

Tussen twee variabelen G en t bestaat een verband, waarvoor de volgende tabel geldt:

t	G
3	1,2
7	3,6
10	6,0

4pt d Onderzoek of dit verband lineair kan zijn, exponentieel kan zijn of geen van beide kan zijn.

Opgave 2 – Verspreiding van een virusziekte

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

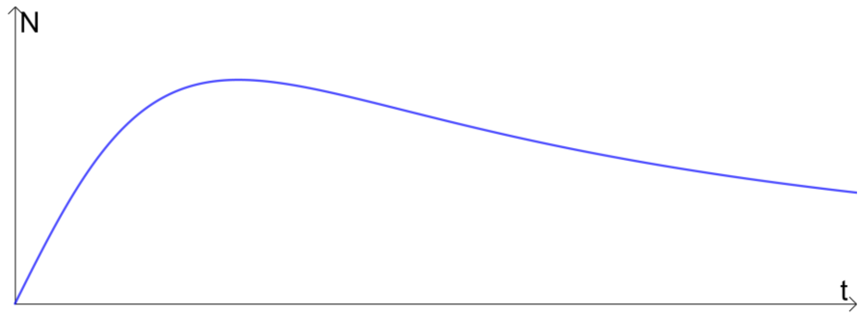
Als er een nieuw virus opduikt, neemt het aantal besmettingen vaak eerst snel toe, om later weer geleidelijk af te nemen. Zo werd de wereld in de jaren 80 van de twintigste eeuw geconfronteerd met de uitbraak van het HIV virus.

Het gezondheidscentrum van land L heeft toen modellen opgesteld die het verband geven tussen het aantal nieuwe besmettingen per jaar in land L (N) en de tijd t in jaren met $t = 0$ op 1 januari 1980.

In een eerste model wordt dit verband gegeven door de formule

$$N = \frac{50\,000\,t}{t^2 + 25}$$

In de figuur hieronder ziet u een grafiek die dit verband weergeeft.



4pt a Bereken algebraïsch in welke jaren het aantal nieuwe besmettingen per jaar volgens dit model gelijk is aan 4000 .

5pt b Gebruik de afgeleide $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ om algebraïsch het maximale aantal nieuwe besmettingen per jaar te berekenen dat er volgens dit eerste model in land L geweest zijn.

In een tweede model wordt het verband tussen N en t gegeven door de formule

$$N = t \cdot \mathrm{e}^{8-0{,}16t}$$

In dit tweede model geldt dat de helling van de bijbehorende grafiek op $t = 5$ gelijk is aan $0{,}2\mathrm{e}^{7{,}2}$.

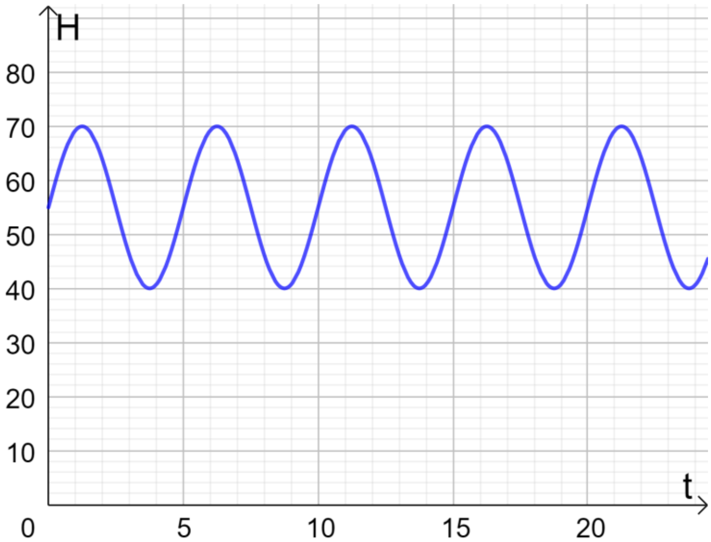
5pt c Toon dit algebraïsch aan.

2pt d Ligt de piek van het aantal nieuwe besmettingen volgens het tweede model eerder of later dan $t = 5$?
Beredeneer uw antwoord.

Opgave 3 – Een windmolen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Boer Bert heeft een windmolen op zijn land staan. Op één van de wieken van deze windmolen is een sensor gemonteerd, die onder meer de windsnelheid meet.
Op een gunstige dag waait de wind constant en draaien de wieken van deze molen met een constante snelheid. In de figuur hieronder ziet u de grafiek die het verband geeft tussen H, de hoogte van de sensor boven de grond in meters, en t, de tijd in seconden.



Bij deze figuur past een formule van de vorm $H = a + b\sin(ct)$.

4pt a Gebruik de figuur om a, b en c te bepalen.

Voor een andere windmolen wordt het verband tussen de hoogte van de sensor (in meters boven de grond) en de tijd (in seconden) geven door de formule

$$H = 55 - 18\sin\big(0{,}25\pi(t - 1{,}5)\big)$$

5pt b Bereken algebraïsch de eerste drie tijdstippen na $t = 0$ waarop de sensor op zijn hoogste punt is.

Opgave 4 – Europese verkiezingen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bij de recente Europese verkiezingen in land L stemde 30% van de kiesgerechtigden op een pro-Europese partij. 20% van de kiesgerechtigden stemde op een eurosceptische partij en 50% van de kiesgerechtigden ging niet stemmen.
Een talkshow nodigt drie willekeurig geselecteerde kiesgerechtigden uit om het resultaat van deze verkiezingen te bespreken.

5pt **a** Bereken de kans dat de talkshow één kiesgerechtigde uitnodigt uit elke categorie (Pro-Europees, eurosceptisch of niet-stemmer).

De leider van één van de eurosceptische partijen beweert dat meer dan 60% van de niet-stemmers op een eurosceptische partij zou hebben gestemd als zij verplicht waren geweest om te gaan stemmen. Om dit te toetsen vraagt de talkshow aan 100 willekeurig geselecteerde niet-stemmers wat ze gestemd zouden hebben als ze verplicht waren geweest om te stemmen. 64 van deze niet-stemmers zeggen dat zij dan op een eurosceptische partij zouden hebben gestemd. In deze toetsingsprocedure neemt men een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0{,}05$.

2pt **b** Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

De kans dat 64 van de 100 willekeurig geselecteerde niet-stemmers op een eurosceptische partij zou hebben gestemd als 60% van alle niet-stemmers op een eurosceptische partij zou hebben gestemd is ongeveer gelijk aan 0,06.

4pt **c** Bereken deze kans afgerond op 6 cijfers achter de komma.

3pt **d** Kunt u een conclusie trekken uit deze toetsingsprocedure?
Zo ja, motiveer deze conclusie. Zo nee, leg uit waarom.

Opgave 5 – Conference peren

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De Conference peer is een soort peer die werd geïntroduceerd op de National British Pear Conference in London in 1885, waar deze de eerste prijs won.
Het gewicht van conference peren is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 226$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 4$ g.

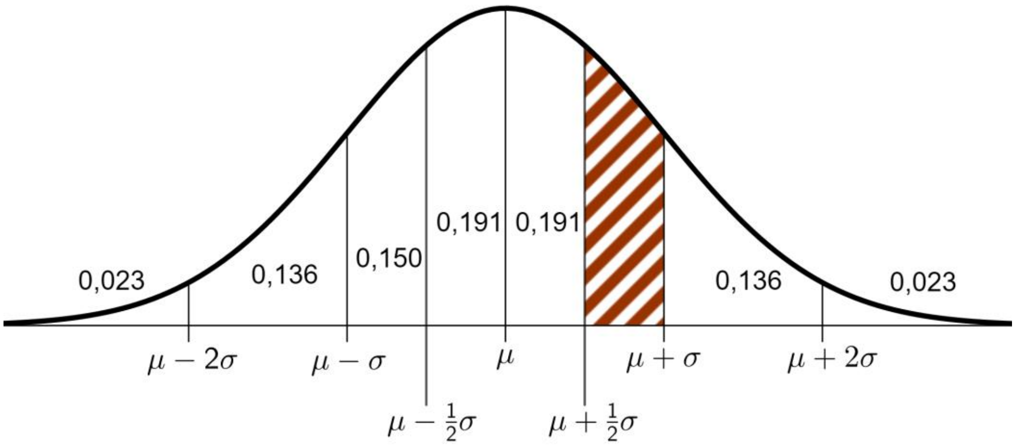
4pt **a** Gebruik de figuur onderaan deze pagina om het percentage conference peren te berekenen dat een gewicht heeft tussen 218 g en 230 g.

Een supermarkt verkoopt Conference peren in kistjes die 10 peren bevatten.
Het gewicht van de lege kistjes is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 53$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 3$ g.

5pt **b** Gebruik de figuur onderaan deze pagina om het percentage van deze kistjes te berekenen dat een totaal gewicht (kistje + 10 peren) heeft van minder dan 2300 g.

Eva koopt één van deze kistjes. Helaas zijn 4 van de 10 peren in dit kistje rot.
Ze pakt twee willekeurige peren uit dit kistje.

4pt **c** Bereken de kans dat tenminste één van deze twee peren rot is.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$.

Opgave 6 – Een betaalkaart voor het openbaar vervoer

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In land L werd op 1 januari 2010 een nieuwe betaalkaart voor het openbaar vervoer geïntroduceerd. Het aantal gebruikers van deze kaart wordt gegeven door de formule

$$N = \frac{30}{2 + 3\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

In deze formule is N het aantal gebruikers van deze kaart in miljoenen en is t de tijd in jaren, met $t = 0$ op 1 januari 2010.

4pt **a** Bereken algebraïsch het percentage waarmee het aantal gebruikers van deze kaart toenam tussen 1 januari 2010 en 1 januari 2011.

6pt **b** Bereken algebraïsch het tijdstip (jaar en maand) waarop deze kaart 10 miljoen gebruikers had.

2pt **c** Bereken het maximale aantal gebruikers van deze kaart volgens de hierboven gegeven formule.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\quad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\quad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\ldots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\quad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g=\mu_T-1{,}645\sigma_T$	$g=\mu_T+1{,}645\sigma_T$	$g_l=\mu_T-1{,}96\sigma_T$ $g_r=\mu_T+1{,}96\sigma_T$
0,01	$g=\mu_T-2{,}33\sigma_T$	$g=\mu_T+2{,}33\sigma_T$	$g_l=\mu_T-2{,}58\sigma_T$ $g_r=\mu_T+2{,}58\sigma_T$

