CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum:	19 april 2024
Tijd:	13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven:	6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	6	6	3	4	4	3
b	5	5	4	3	6	5
c	6	6	3	2		
e			5	5		
Totaal	17	17	15	14	10	8

$$\text{Cijfer} = \frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bij het ***algebraïsch*** *uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 4)$.
De functie g wordt gegeven door $g(x) = x^3 + 8$.

6pt a Bereken algebraïsch de coördinaten van het (de) snijpunt(en) van de grafieken van de functies f en g.

De functie h wordt gegeven door

$$h(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{16}{x}$$

Het punt $H(8,0)$ ligt op de grafiek van h.
U hoeft dit niet aan te tonen.

5pt b Bereken algebraïsch de helling van de raaklijn aan de grafiek van h in punt H.

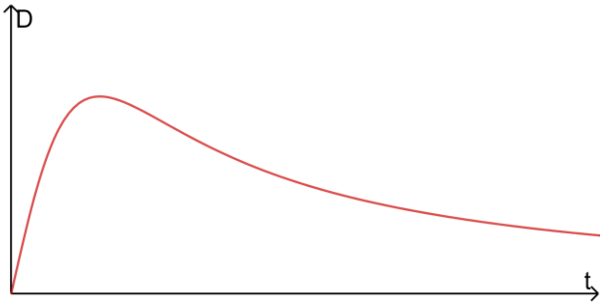
De functie k wordt gegeven door $k(x) = \sqrt{3x^2 + 24}$.

6pt c Bereken algebraïsch de waarde(n) van a waarvoor de raaklijn aan de grafiek van k in het punt $A\big(a, k(a)\big)$ evenwijdig loopt aan de lijn $y = -x$.

Opgave 2 – Pizza!

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een grote pizzaverkoper introduceert een nieuwe pizza: de San Francisco Special. Na de introductie stijgt de vraag naar de San Francisco Special snel, maar na een tijdje neemt de vraag af. Dit ziet u in de grafiek hieronder.



Het verband tussen D, de vraag in miljoenen per dag (wereldwijd!), en t, de tijd in weken met $t = 0$ bij de introductie van de San Francisco Special, kan worden benaderd door de formule

$$D = \frac{165t}{2t^2 + 450}$$

6pt a Gebruik de afgeleide $\frac{dD}{dt}$ om algebraïsch de maximale vraag per dag naar de San Francisco Special te berekenen volgens deze formule.

Als de vraag afneemt tot onder de 1 miljoen per dag, wordt de San Francisco Special niet meer verkocht en wordt een nieuwe pizza geïntroduceerd: de Los Angeles Delight.

5pt b Bereken algebraïsch het tijdstip waarop de San Francisco Special niet meer verkocht wordt volgens de formule hierboven.
Geef uw antwoord afgerond op hele dagen.

De verwachte vraag naar de Los Angeles Delight wordt gegeven door de formule

$$E = 0{,}4t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05t}$$

In deze formule is E de verwachte vraag voor de Los Angeles Delight in miljoenen per dag en is t de tijd in weken met $t = 0$ bij de introductie van deze pizza.

6pt c Gebruik de afgeleide $\frac{dE}{dt}$ om algebraïsch de maximale verwachte vraag per dag naar de Los Angeles Delight te berekenen volgens deze formule.

Opgave 3 – Een speciaal spel met een gewone dobbelsteen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Joe en Donald spelen een speciaal spel met een gewone dobbelsteen.

Bij iedere beurt werpen beide spelers met de dobbelsteen. Als de uitkomst van zijn worp even is, krijgt de speler net zoveel punten als de uitkomst. Maar als de uitkomst van de worp oneven is, krijgt de speler twee keer zoveel punten als de uitkomst.

Het aantal punten dat een speler in één beurt krijgt is een toevalsvariabele X.
De kansen voor X staan in de tabel hieronder.

Punten x	2	4	6	10
Kans $P(X = x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3pt **a** Bereken $E(X)$, het verwachte aantal punten dat een speler in iedere beurt krijgt.

4pt **b** Bereken de kans dat de som van de punten die Joe en Donald in een beurt krijgen precies 8 is.

De kans dat Joe en Donald in een beurt hetzelfde aantal punten krijgen is $\frac{5}{18}$.

3pt **c** Toon dit aan.

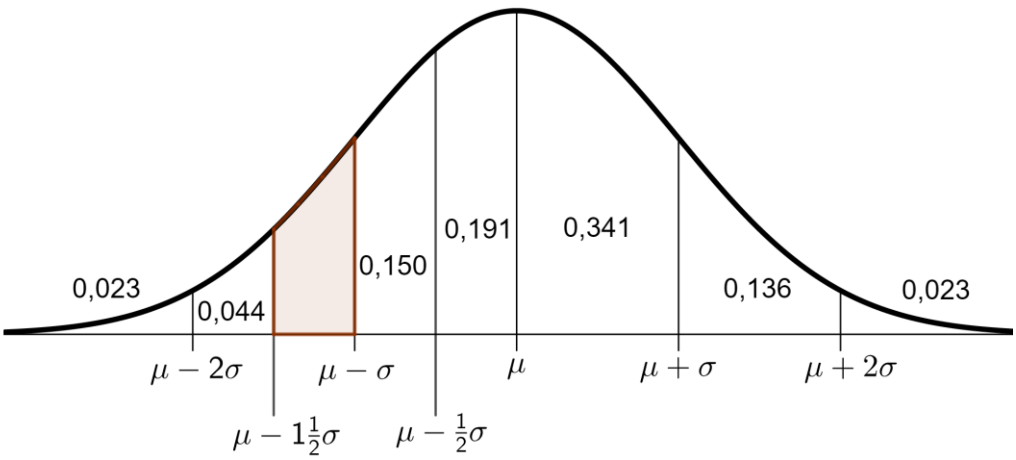
5pt **d** Bereken de kans dat Joe in precies vier van de eerste tien beurten meer punten krijgt dan Donald.

Opgave 4 – Pindakaas

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De Vecal fabriek verkoopt pindakaas in potten.
Het gewicht van de pindakaas in deze potten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 450$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 4$ g.

4pt a Gebruik de figuur hieronder om het percentage van deze potten te berekenen dat tussen de 442 en 452 g pindakaas bevat.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu - 1\frac{1}{2}\sigma < X < \mu - \sigma\right) = 0{,}092$.

Het gewicht van de lege potten is normaal verdeeld met een gemiddelde van $\mu = 100$ g en een standaardafwijking van $\sigma = 1$ g.

3pt b Bereken het gemiddelde en de standaardafwijking van het totale gewicht van een met pindakaas gevulde pot.

Bij een kwaliteitscontrole wil de Vecal fabriek toetsen of het gemiddelde gewicht van de pindakaas in een pot inderdaad 450 g is. Voor deze toetsingsprocedure wordt het gewicht gemeten van de pindakaas in 100 potten die onafhankelijk van elkaar gevuld zijn. Men neemt aan dat het gewicht normaal verdeeld is met een standaardafwijking van $\sigma = 4$ g en men neemt een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0{,}05$.

2pt c Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

5pt d Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure als het gemiddelde gewicht van de pindakaas in de 100 potten gelijk is aan 450,7 g?

Opgave 5 – Twee golfslagbaden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een golfslagbad is een zwembad waarin golven worden gegenereerd door kleppen. Als deze kleppen in beweging zijn, is de diepte van het water op een bepaald punt een periodieke functie. Voor een bepaald golfslagbad wordt deze functie gegeven door

$$D = 3 + 0{,}5\sin\left(\tfrac{1}{18}\pi \cdot (4t + 3)\right)$$

In deze formule is D de diepte van het water in meters (dat is de hoogte van het water ten opzichte van de bodem van het zwembad) en is t de tijd in seconden,

4pt **a** Bereken algebraïsch de eerste drie tijdstippen na $t = 0$ waarop de diepte van het water volgens deze formule 3,5 meter is.

Voor een ander golfslagbad wordt de diepte in meters op een bepaald punt als functie van de tijd in seconden getoond in de grafiek hieronder.

Bij deze grafiek hoort een functie met een formule van de vorm

$$D = a + b \cdot \sin\big(c \cdot (t - d)\big)$$

6pt **b** Bereken mogelijke waarden voor a, b, c en d in deze formule.

Opgave 6 – Twee groeimodellen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Het aantal gebruikers van het sociale media platform *Y* wordt gegeven door de formule

$$N_Y = 2{,}5 \cdot 1{,}5^t$$

In deze formule is N_Y het aantal gebruikers in miljoenen en is t de tijd in jaren.

3pt a Bereken algebraïsch het tijdstip waarop platform *Y* 100 miljoen gebruikers zal hebben.

Het aantal gebruikers van het sociale media platform *Z* wordt gegeven door de formule

$$N_Z = \frac{200}{1 + 4\mathrm{e}^{-0{,}15t}}$$

In deze formule is N_Z het aantal gebruikers in miljoenen en is t de tijd in jaren.

5pt b Bereken algebraïsch het tijdstip waarop platform Z 100 miljoen gebruikers zal hebben.

Einde van het tentamen.

Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of ***uw naam*** *en het* ***opgavenummer*** *op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

Wat er ***niet*** *in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^p = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$