Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 19 april 2024

Vraag 1a - 6 punten

Haakjes wegwerken geeft $f(x) = (x^2)^2 - 2x^2 - 4x^2 + 2 \cdot 4 = x^4 - 6x^2 + 8$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = x^3 + 8 \Leftrightarrow x^4 - x^3 - 6x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - x - 6 = 0$

$x^2 = 0$ geeft $x = 0$ en $y = f(0) = g(0) = 8$, dus snijpunt $(0{,}8)$

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$

Mag uiteraard ook met de abc-formule.

$x = -2$ geeft $y = f(-2) = g(-2) = 0$, dus snijpunt $(-2{,}0)$

$x = 3$ geeft $y = f(3) = g(3) = 35$, dus snijpunt $(3{,}35)$

Vraag 1b - 5 punten

$h(x) = x^{\frac{1}{3}} - 16x^{-1}$, dus $h'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 16x^{-2}$

Dit geeft $h'(8) = \frac{1}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}} + 16 \cdot 8^{-2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

Vraag 1c - 6 punten

$$k'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 24}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 24}}$$

$k'(a) = -1 \Leftrightarrow 3a = -\sqrt{3a^2 + 24} \Rightarrow 9a^2 = 3a^2 + 24 \Leftrightarrow 6a^2 = 24 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$

Alleen $a = -2$ voldoet, want $k'(2) = 1 \neq -1$.

Vraag 2a - 6 punten

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{165 \cdot (2t^2 + 450) - 165t \cdot 4t}{(2t^2 + 450)^2} = \frac{165(2t^2 + 450 - 4t^2)}{(2t^2 + 450)^2} = \frac{165(450 - 4t^2)}{(2t^2 + 450)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow 450 - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 = 450 \Leftrightarrow t^2 = 225 \Rightarrow t = 15$$

$t = 15$ geeft $D = \frac{165 \cdot 15}{450 + 450} = 2{,}75$ (miljoen pizza's)

Vraag 2b - 5 punten

$$D = 1 \Leftrightarrow 165t = 2t^2 + 450 \Leftrightarrow 2t^2 - 165t + 450 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{165 \pm \sqrt{165^2 - 4 \cdot 2 \cdot 450}}{4} = \frac{165 \pm \sqrt{23625}}{4}$$

D zakt onder de 1 miljoen bij de grootste van deze twee oplossingen (zie grafiek)

Hieruit volgt $t = \frac{165 + \sqrt{23625}}{4} \approx 79{,}676$ weken ≈ 558 dagen

Vraag 2c - 6 punten

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0{,}4 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05t} + 0{,}4t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05t} \cdot -0{,}05 = 0{,}4\mathrm{e}^{-0{,}05t}(1 - 0{,}05)$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}05t = 0 \Leftrightarrow 0{,}05t = 1 \Leftrightarrow t = 20$$

$t = 20$ geeft $E = 0{,}4 \cdot 20 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}05 \cdot 20} = 8\mathrm{e}^{-1} \approx 2{,}943$ (miljoen pizza's)

Vraag 3a - 3 punten

$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{6} \ldots = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{6}{3} + \frac{5}{3} = \frac{15}{3} = 5$

Vraag 3b - 4 punten

De som is 8 als

- Joe 2 punten krijgt en Donald 6 (kans $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$)
- Joe 6 punten krijgt en Donald 2 (kans $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$)
- Beide 4 punten krijgen (kans $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$)

De gevraagde kans is dus $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

Vraag 3c - 3 punten

$P(beide\ 2\ punten) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; $P(beide\ 4\ punten) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P(beide\ 6\ punten) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$; $P(beide\ 10\ punten) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P(beide\ gelijk) = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

Vraag 3d - 5 punten

Bij iedere beurt is de kans dat één van beide wint $1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$

De kans dat Joe in een beurt meer punten krijgt dan Donald is dus $\frac{13}{18} : 2 = \frac{13}{36}$

Beide spelers hebben immers gelijke kansen!

Kan ook met: $P(J\ 10, D\ geen\ 10) + P(J\ 6, D\ 2\ of\ 4) + P(J\ 4, D\ 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$

De kans Joe in dat precies 4 van de eerste 10 beurten meer punten krijgt dan Donald is dus $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{13}{36}\right)^4 \cdot \left(\frac{23}{36}\right)^6 \approx 0{,}242848$

Vraag 4a - 4 punten

$442 = 450 - 2 \cdot 4 = \mu - 2\sigma$; $452 = 450 + \frac{1}{2} \cdot 4 = \mu + \frac{1}{2}\sigma$

De figuur geeft dat $0{,}044 + 0{,}092 + 0{,}150 + 0{,}191 = 0{,}5 - 0{,}023 = 0{,}477$ deel van de potten een inhoud heeft tussen $\mu - 2\sigma$ en μ

De figuur geeft dat $0{,}191$ deel van de potten een inhoud heeft tussen $\mu - \frac{1}{2}\sigma$ en μ;

Vanwege de symmetrie heeft dan ook $0{,}191$ deel van de potten een inhoud tussen μ en $\mu + \frac{1}{2}\sigma$

Hieruit volgt dat $0{,}477 + 0{,}191 = 0{,}668$ deel (= 66,8%) een inhoud heeft tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + \frac{1}{2}\sigma$.

Alternatief:

Vanwege de symmetrie van de figuur komt dit percentage overeen met het percentage tussen $\mu - \frac{1}{2}\sigma$ en $\mu + 2\sigma$, dat is 19,1% + 34,1% + 13,6% = 66,8%

Vraag 4b - 3 punten

$\mu_{Totaal} = \mu_{pindakaas} + \mu_{pot} = 450 + 100 = 550$

$\sigma_{Totaal} = \sqrt{\sigma^2_{pindakaas} + \sigma^2_{pot}} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ $(\approx 4{,}1231)$

Vraag 4c - 2 punten

H_0: $\mu = 450$; H_1: $\mu \neq 450$

Vraag 4d - 5 punten

Voor *G*, het gemiddelde gewicht van de pindakaas in de 100 potten in de steekproef, geldt
$\mu_G = \mu = 450$ en $\sigma_G = \frac{\sigma}{\sqrt{100}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

Omdat de gevonden steekproefuitkomst groter is dan μ, moet deze vergeleken worden met
$g_r = \mu_G + 1{,}96\sigma_G = 450 + 1{,}96 \cdot 0{,}4 = 450{,}784$

De steekproefuitkomst ligt onder deze grenswaarde, dus wordt de nulhypothese niet verworpen.

Vraag 5a - 4 punten

$D = 3{,}5 = 3 + 0{,}5$ is de maximale waarde van D, dus $\sin\left(\frac{1}{18}\pi(4t+3)\right) = 1$

Dit geeft voor het eerste tijdstip $\frac{1}{18}\pi(4t+3) = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow 4t + 3 = 9 \Leftrightarrow t = 1\frac{1}{2}$

De periode van D is $2\pi/\frac{4}{18}\pi = 2 \cdot \frac{18}{4} = 9$

De volgende twee tijdstippen zijn dus: $t = 1\frac{1}{2} + 9 = 10\frac{1}{2}$ en $t = 10\frac{1}{2} + 9 = 19\frac{1}{2}$

Vraag 5b - 6 punten

D is maximaal 3,5 en minimaal 2

Dit geeft $a = evenwichtstand = \frac{maximum+minimum}{2} = \frac{3{,}5+2}{2} = 2{,}75$

en $b = amplitude = maximum - evenwichtsstand = 3{,}5 - 2{,}75 = 0{,}75$
$\left(= evenwichtsstand - minimum = \frac{maximum - minimum}{2}\right)$

De periode is 6, dit geeft $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$

Op $t = 0$ gaat D dalend door de evenwichtsstand.

Een halve periode later gaat D stijgend door de evenwichtsstand. Dit geeft $d = 3$.

Vraag 6a - 3 punten

$2{,}5 \cdot 1{,}5^t = 100 \Leftrightarrow 1{,}5^t = 40 \Leftrightarrow t = {}^{1{,}5}\log(40) \approx 9{,}0979$

Vraag 6b - 5 punten

$\frac{200}{1 + 4e^{-0{,}15t}} = 100 \Leftrightarrow 1 + 4e^{-0{,}15t} = 2 \Leftrightarrow 4e^{-0{,}15t} = 1 \Leftrightarrow e^{-0{,}15t} = 0{,}25$

Dit geeft $-0{,}15t = \ln(0{,}25) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}25)}{-0{,}15} \approx 9{,}2420$

