

# CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

## Tentamen Wiskunde A

Datum: 20 april 2023  
Tijd: 13.30 – 16.00 uur (2,5 uur)  
Aantal opgaven: 5

**Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.**

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex.

Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan.**

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

***N.B. In verband met de beperkte beschikbaarheid van de tentamenhal is de tentamentijd teruggebracht tot 2,5 uur (150 minuten). Het aantal opgaven is uiteraard ook teruggebracht.***

Te behalen punten per onderdeel:					
Opgave	1	2	3	4	5
a	6	5	4	3	5
b	6	5	4	4	2
c	4	5	4	6	5
d			4		
Total	16	15	16	13	12
Cijfer = $\frac{\text{behaald aantal punten}}{8} + 1$					
U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.					

## Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals  $\sqrt{2}$  en  $\log(3)$ .

Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie  $f$  wordt gegeven door  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ .

6pt a Bereken algebraïsch de minimale waarde van  $f(x)$ .

De functie  $g$  wordt gegeven door  $g(x) = \sqrt{4x^2 + 48}$ .

6pt b Bereken algebraïsch de waarde(n) van  $a$  waarvoor de raaklijn aan de grafiek van  $g$  in het punt  $A(a, g(a))$  evenwijdig loopt aan de lijn  $y = -x$ .

Het verband tussen de grootheden  $Q$  en  $R$  wordt gegeven door de formule

$$\log(R) = 2 \log(Q) + 3$$

Deze formule kan worden herleid tot een formule van de vorm

$$R = c \cdot Q^d$$

4pt c Bereken algebraïsch de waarden van  $c$  en  $d$  in deze tweede formule.

## Opgave 2 – De verspreiding van een ziekte

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

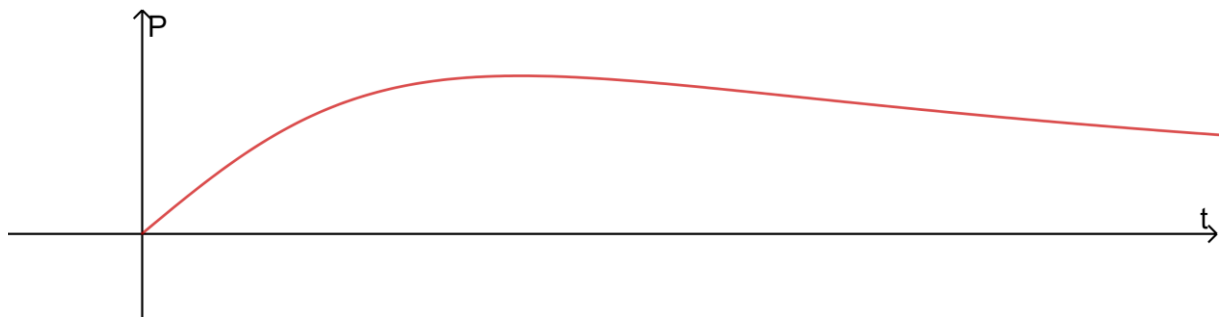
Wanneer een nieuwe virusziekte opduikt, stijgt het percentage van de bevolking dat door deze ziekte is getroffen vaak eerst, maar zal dit later weer dalen. Voor een bepaalde ziekte worden twee modellen geïntroduceerd voor de verspreiding van deze ziekte.

In het eerste model wordt  $P$ , het percentage van de bevolking dat door de ziekte is getroffen, gegeven door de formule

$$P = \frac{30t}{t^2 + 36}$$

In deze formule is  $t$  de tijd in weken nadat de ziekte voor het eerst ontdekt is.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek die het verband weergeeft tussen  $P$  en  $t$ .



- 5pt a Bereken algebraïsch het aantal weken waarin volgens dit eerste model meer dan 2% van de bevolking getroffen is door deze ziekte
- 5pt b Bereken algebraïsch het maximale percentage van de bevolking dat volgens dit eerste model getroffen is door de ziekte.

In het tweede model wordt  $P$ , het percentage van de bevolking dat door de ziekte is getroffen, gegeven door de formule

$$P = 1,4t \cdot e^{-0,2t}$$

In deze formule is  $t$  weer de tijd in weken nadat de ziekte voor het eerst ontdekt is.

- 5pt c Bereken algebraïsch het tijdstip waarop het percentage van de bevolking dat getroffen door de ziekte maximaal is volgens dit tweede model.

### Opgave 3 – Pachisi

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Pachisi is een eeuwenoud Indiaas bordspel dat gezien kan worden als een voorloper van het Britse spel *Ludo* en het Nederlandse spel *Mens-Erger-Je-Niet*. In plaats van een dobbelsteen wordt het aantal zetten dat een speler bij elke beurt kan doen, bepaald door een worp van zes kaurischelpen, zoals te zien op de foto hiernaast.



In de onderstaande tabel staan voor een bepaalde set van zes kaurischelpen de mogelijke uitkomsten van elke worp en de bijbehorende kansen.

Aantal schelpen met de opening boven	6	5	4	3	2	1	0
Aantal zetten	6	5	4	3	2	10	25
Kans	0,10	0,13	0,17	0,20	0,25	0,10	0,05

Albert speelt dit spel met zijn vrouw Betty.

- 4pt a Bereken het verwachte aantal zetten dat Albert krijgt bij zijn eerste worp van de zes kaurischelpen.
- 4pt b Bereken de kans dat Albert precies 12 zetten krijgt uit zijn eerste twee worpen met de zes kaurischelpen.
- 4pt c Bereken de kans dat Albert tenminste 11 zetten krijgt uit zijn eerste vijf worpen met de zes kaurischelpen.

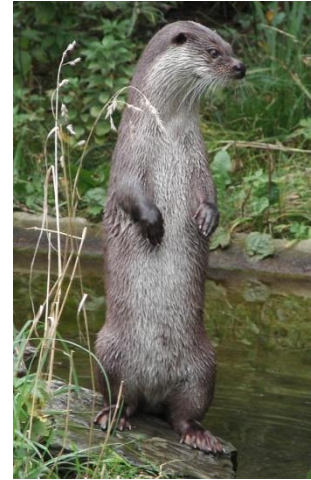
Na een tijdje willen hun dochters, Carla en Dinie, en hun zonen, Eddie en Freddie, meespelen met Albert en Betty. Ze vormen daarvoor door loting twee teams van drie.

- 4pt d Bereken de kans dat één van deze teams geheel uit mannen bestaat en het andere team geheel uit vrouwen.

## Opgave 4 – Otterpopulaties

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De Euraziatische otter is een semiaquatisch zoogdier afkomstig uit Europa en Azië. In Nederland was de otter bijna uitgestorven, maar de laatste jaren bloeien de populaties weer op.



In een zeker natuurgebied waren er 45 otters in 2010, waren er 60 otters in 2015 en waren er 80 otters in 2020.

- 3pt a Wat voor groeimodel past het best bij deze data, een lineair model of een exponentieel model? Verklaar uw antwoord!

In een tweede natuurgebied neemt het aantal otters met 4% per jaar toe.

- 4pt b Bereken de tijd in maanden waarin het aantal otters in dit tweede natuurgebied zal verdubbelen als de populatie met 4% per jaar blijft groeien.

In een derde natuurgebied was het aantal otters zo groot, dat er niet genoeg vissen meer waren om ze te voeden. Daarom nam het aantal otters af, maar toen nam het aantal vissen weer toe, gevolgd door een toename van het aantal otters. En toen nam het aantal vissen weer af en herhaalde het proces zich. In de jaren 2010, 2014, 2018 en 2022 bereikte het aantal otters in dit natuurgebied zijn maximum van 120. In de jaren 2012, 2016 en 2020 bereikte het aantal otters in dit natuurgebied zijn minimum van 70.

Het aantal otters in dit natuurgebied kan worden gemodelleerd met een formule van de vorm

$$A = a + b \cdot \sin(c(t - d))$$

In deze formule is  $A$  het aantal otters in dit natuurgebied en is  $t$  de tijd in jaren, met  $t = 0$  in 2010.

- 6pt c Bepaal de waarden van  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  in deze formule. Licht je antwoorden toe.

## Opgave 5 – Bonobo's

*Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!*

De **bonobo** (*Pan paniscus*), historisch ook wel de dwergchimpansee genoemd, is een met uitsterven bedreigde mensapensoort en een van de twee soorten die deel uitmaken van het geslacht *Pan*, de andere is de gewone chimpansee (*Pan troglodytes*). De Bonobo komt voor in een gebied van 500.000 km<sup>2</sup> in het Congobekken in de Democratische Republiek Congo, Centraal-Afrika.

*Bron: Wikipedia.*



De lengte van volwassen Bonobo's in het wild is normaal verdeeld met een gemiddelde van  $\mu = 76,5$  cm en een standaardafwijking van  $\sigma = 2,2$  cm.

- 5pt a Gebruik de vuistregels om het percentage van deze apen te bepalen dat een lengte heeft die tussen 72,1 cm en 78,7 cm ligt.

Een dierentuin heeft een grote populatie bonobo's. De verzorgers willen toetsen of de gemiddelde lengte van hun bonobo's afwijkt van de gemiddelde lengte van de bonobo's in het wild. Voor deze toetsingsprocedure meten ze de lengte van 16 volwassen bonobo's in de dierentuin. Ze gaan ervan uit dat de lengte van de bonobo's in de dierentuin normaal verdeeld is met een standaardafwijking van  $\sigma = 2,2$  cm en nemen een onbetrouwbaarheidsdrempel van  $\alpha = 0,05$ .

- 2pt b Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.
- 5pt c Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure als de gemiddelde lengte van de 16 Bonobo's uit de dierentuin 75,5 cm is?

*Einde van het tentamen.*

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of uw naam en het opgavenummer op ieder antwoordblad staat.*

*Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.*

*Wat er niet in het mapje moet:*

- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;*
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;*
- kladpapier;*
- deze opgaven.*

*Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.*

*Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).*

# Formulelijst Wiskunde A

## Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking  $ax^2 + bx + c = 0$  met  $a \neq 0$  en  $b^2 - 4ac \geq 0$  zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Differentiëren

Naam van de regel	Functie	Afgeleide
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ofwel $\frac{dk}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

## Logaritmen

Regel	Voorwaarden
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$	$g > 0, g \neq 1, a > 0$
${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, p > 0, p \neq 1$

## Rijen

<b>rekenkundige rij:</b>	$Som = \frac{1}{2} \cdot \text{aantal termen} \cdot (u_e + u_l)$
<b>meetkundige rij:</b>	$Som = \frac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
<i>In beide formules geldt:</i>	$e = \text{rangnummer eerste term}; \quad l = \text{rangnummer laatste term}$

Meer formules op de volgende pagina.

## Formulelijst wiskunde A (vervolg)

### Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen  $X$  en  $Y$  geldt:  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen  $X$  en  $Y$  geldt:  $\sigma(X + Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$ -wet:

Bij een serie van  $n$  onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som  $S$  en voor het gemiddelde  $\bar{X}$  van de uitkomsten  $X$ :

$$E(S) = n \cdot E(X)$$

$$\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$$

$$E(\bar{X}) = E(X)$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

### Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele  $X$ , waarbij  $n$  het aantal experimenten is en  $p$  de kans op succes per keer, geldt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \quad \text{met} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Verwachtingswaarde:  $E(X) = np$

Standaardafwijking:  $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

$n$  en  $p$  zijn de parameters van de binomiale verdeling.

### Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele  $X$  die normaal verdeeld is met gemiddelde  $\mu$  en standaardafwijking  $\sigma$  geldt:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ is standaard normaal verdeeld en } P(X < g) = P\left(Z < \frac{g - \mu}{\sigma}\right)$$

$\mu$  en  $\sigma$  zijn de parameters van de normale verdeling.

### Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootte  $T$  normaal verdeeld is met gemiddelde  $\mu_T$  en standaardafwijking  $\sigma_T$  zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

$\alpha$	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1,645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1,645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1,96\sigma_T$ $g_r = \mu_T + 1,96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2,33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2,33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2,58\sigma_T$ $g_r = \mu_T + 2,58\sigma_T$