CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 22 juli 2022
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 5

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:					
Opgave	1	2	3	4	5
a	6	4	3	4	2
b	6	5	4	3	4
c	5	4	1	4	4
d	5	5	4	5	
e			3		
Totaal	22	18	15	16	10

Cijfer $= \frac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

*Bij het **algebraïsch** uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 2x - 7$.
De lijn ℓ wordt gegeven door de vergelijking $y = 2x + 4$.

6pt a Bereken algebraïsch de waarden van a waarvoor geldt dat de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ evenwijdig loopt aan lijn ℓ.

De functie g wordt gegeven door

$$g(x) = \frac{x}{(x-3)^2}$$

6pt b Bereken algebraïsch de coördinaten van het/de punt(en) op de grafiek van g waarin de raaklijn aan deze grafiek horizontaal loopt.

Gegeven word teen meetkundige rij met tweede term $u_2 = 5120$ en vijfde term $u_5 = 640$.

5pt c Bereken algebraïsch de som van de eerste tien termen van deze rij, dat is $u_1 + u_2 + \cdots + u_9 + u_{10}$.

Het verband tussen de grootheden P en L wordt gegeven door de formule

$$\log(P) = 0{,}16\log(L) - 0{,}20$$

Deze formule kan worden omgewerkt tot een formule van de vorm

$$L = a \cdot P^b$$

5pt d Bereken algebraïsch de waarden van a en b in deze tweede formule.

Opgave 2 – Groeimodellen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een bioloog bestudeert de groei van een kolonie bacteriën. Op een zeker moment $(t = 0)$ is het gewicht van deze kolonie 576 milligram. Eén uur later $(t = 1)$ is het gewicht van deze kolonie 720 milligram.

De bioloog modelleert dit groeiproces met een formule van de vorm

$$W = a \cdot \mathrm{e}^{bt}$$

In deze formule is W het gewicht van de kolonie in milligram en is t de tijd in uren.

4pt a Bereken algebraïsch de waarden van a en b die passen bij bovenstaande gegevens.

Vervolgens modelleert de bioloog dit groeiproces met de formule

$$W = (576 - 216t) \cdot \mathrm{e}^{0,69315t}$$

met W en t zoals hierboven aangegeven.

5pt b Bereken algebraïsch de groeisnelheid $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ op $t = 1$.

Geef uw antwoord in milligram per uur nauwkeurig.

De bioloog onderzoekt de invloed van de temperatuur op de groei van de bacteriën. Hij vindt daarbij het volgende verband tussen T, de temperatuur van een kolonie in graden Celsius, en P, het groeipercentage van het gewicht van deze kolonie over één uur:

$$P = \sqrt{111T + 54T^2 - T^3} - 100$$

Deze formule geldt voor temperaturen tussen $15°\mathrm{C}$ en $50°\mathrm{C}$.

4pt c Bereken in milligram nauwkeurig het gewicht van een kolonie na één uur, als gegeven wordt dat dit gewicht aan het begin van dit uur 110 milligram is en dat de temperatuur in dit uur gelijk gehouden wordt aan $25°\mathrm{C}$.

5pt d Bereken algebraïsch de temperatuur tussen $15°\mathrm{C}$ en $50°\mathrm{C}$ waarvoor het groeipercentage van het gewicht van een kolonie maximaal is.

Opgave 3 – Fluit of munt

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Diederik is scheidsrechter bij het amateurvoetbal. Voorafgaande aan een wedstrijd gebruikt hij doorgaans een munt om te bepalen welke club mag aftrappen. Op een zekere dag is Diederik vergeten een munt mee te nemen en gebruikt hij zijn scheidsrechterfluit om te tossen. Daarbij geeft hij de keus op “gaatje boven”, zoals hiernaast, of niet (dus gaatje onder of op de zijkant).

Later vraagt Diederik zich af of de kans op “gaatje boven” gelijk is aan 0,5 of niet. Hij besluit om zes maal met de fluit te gooien en iedere keer te noteren of het gaatje wel (W) of niet (N) boven ligt. De serie komt er bijvoorbeeld zo uit te zien: WWNNWN.

3pt **a** Hoeveel verschillende series van zes zijn er mogelijk?

Als in een serie een W gevolgd wordt door een N, of als een N gevolgd wordt door een W, noemen we dat een wisseling. Zo heeft de serie WWWWWW geen wisselingen, maar de serie WNWWWN heeft drie wisselingen.

4pt **b** Hoeveel series van zes zijn er met twee wisselingen?

Afgaande op zijn ervaringen tot nu toe, heeft Diederik het idee dat de kans op “gaatje boven” kleiner is dan 0,5. Hij besluit dit te toetsen door de fluit 50 keer op te gooien. Bij 20 van deze 50 worpen is het resultaat “gaatje boven”.

1pt **c** Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

4pt **d** Bereken de kans dat het resultaat “gaatje boven” is bij precies 20 van deze 50 worpen als de kans op “gaatje boven” gelijk is aan 0,5.

3pt **e** Kunt u een conclusie trekken uit deze toetsingsprocedure?
Zo ja, wat is deze conclusie en waarom?
Zo nee, geef dan alle informatie aan die u nog meer nodig heeft om een conclusie te kunnen trekken.

Opgave 4 – Genoeg tijd voor het tentamen?

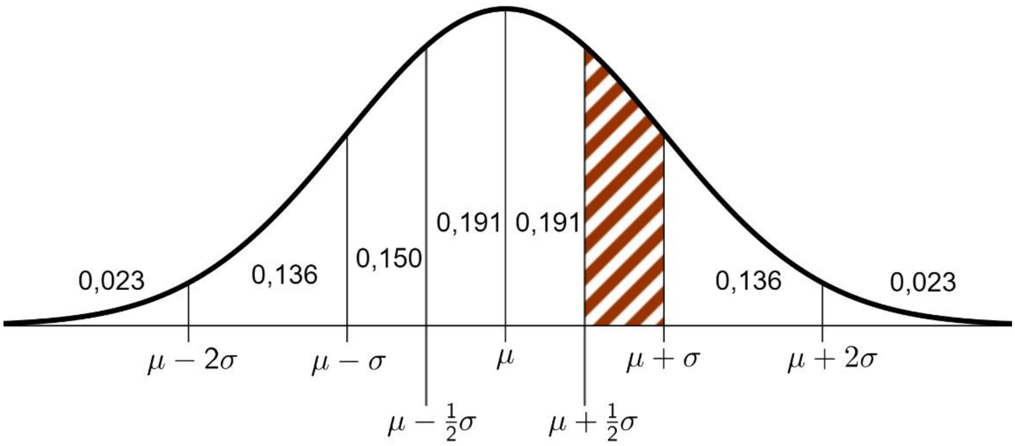
Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een tentamen bestaat uit open vragen en multiple choice vragen.

De tijd die kandidaten nodig hebben om de open vragen te beantwoorden is normaal verdeeld met een gemiddelde van 50 minuten en een standaardafwijking van 5 minuten.

Er nemen 2500 kandidaten deel aan dit tentamen.

4pt **a** Gebruik de figuur hieronder om het verwachte aantal kandidaten te berekenen dat na 60 minuten nog niet klaar is met het beantwoorden van de open vragen.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$

Er zijn zes multiple choice vragen. Voor elk van deze vragen is de tijd die kandidaten nodig hebben om de vraag te beantwoorden normaal verdeeld met een gemiddelde van 10 minuten en een standaardafwijking van 2 minuten.

3pt **b** Bereken de kans dat een kandidaat meer dan 60 minuten nodig heeft om alle 6 de multiple choice vragen te beantwoorden.

4pt **c** Bereken de standaardafwijking van de totale tijd die kandidaten nodig hebben om alle vragen (open + multiple choice) van het tentamen te beantwoorden.

Drie van de multiple choice vragen hebben 3 antwoordopties, de andere drie hebben 4 antwoordopties. Sandra beantwoordt alle multiple choice vragen op de gok.

5pt **d** Bereken de kans dat Sandra precies één van de multiple choice vragen goed beantwoordt.

Opgave 5 – Eb en vloed

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De waterhoogte in de Westerschelde (een zeearm in Zeeland) verandert door de invloed van eb en vloed.

Voor een zekere week kan de waterhoogte benaderd worden met de formule

$$H = 25 + 175\sin(0{,}5t)$$

In deze formule is H de waterhoogte in centimeters boven het gemiddelde zeeniveau en is t de tijd in uren met $t = 0$ om middernacht op zondag.
Merk op dat $0{,}5t$ in radialen is.

2pt a Bereken de minimale en de maximale waterhoogte.

4pt b Bereken algebraïsch met hoeveel procent de waterhoogte toeneemt tussen 1 uur ($t = 1$) en 2 uur ($t = 2$) op zondagmorgen.

4pt c Bereken algebraïsch de eerste twee tijdstippen na $t = 1$ waarop de waterhoogte gelijk is aan die op $t = 1$.

Einde van het tentamen.

*Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of **uw naam** en het **opgavenummer** op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

*Wat er **niet** in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ en $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0, \quad g \neq 1, \quad a > 0, \quad p > 0, \quad p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y)=\sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S)=n\cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S)=\sqrt{n}\cdot\sigma(X)$

$E(\overline{X})=E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ met $k=0,1,2,\dots,n$

Verwachtingswaarde: $E(X)=np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X)=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X<g)=P\left(Z<\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g=\mu_T-1{,}645\sigma_T$	$g=\mu_T+1{,}645\sigma_T$	$g_l=\mu_T-1{,}96\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+1{,}96\sigma_T$
0,01	$g=\mu_T-2{,}33\sigma_T$	$g=\mu_T+2{,}33\sigma_T$	$g_l=\mu_T-2{,}58\sigma_T$
			$g_r=\mu_T+2{,}58\sigma_T$

