Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 22-7-2022

Vraag 1a - 6 punten

$f(x) = x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 2x - 7$ geeft $f'(x) = 4x^3 + 21x^2 - 18x + 2$

Op te lossen is dus $4a^3 + 21a^2 - 18a + 2 = 2 \Leftrightarrow 4a^3 + 21a^2 - 18a = 0$

$\Leftrightarrow a(4a^2 + 21a - 18) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 4a^2 + 21a - 18 = 0$

$4a^2 + 21a - 18 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-18)}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-21 \pm 27}{8}$

De oplossingen zijn dus $a = 0$, $a = \frac{-21+27}{8} = \frac{3}{4}$ en $a = \frac{-21-27}{8} = -6$

Vraag 1b - 6 punten

$g'(x) = \dfrac{(x-3)^2 - x \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \dfrac{(x-3)(x-3) - 2x(x-3)}{(x-3)(x-3)^3} = \dfrac{(x-3) - x \cdot 2}{(x-3)^3} = \dfrac{x - 3 - 2x}{(x-3)^3} = \dfrac{-x-3}{(x-3)^3}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$; dit geeft $y = g(-3) = \frac{-3}{(-6)^2} = \frac{-3}{36} = -\frac{1}{12}$

Alternatief:

$g'(x) = \dfrac{(x-3)^2 - x \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}$

$(x-3)^2 - x \cdot 2(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) - 2x(x-3) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$x = -3$ geeft $y = g(-3) = \frac{-3}{(-6)^2} = \frac{-3}{36} = -\frac{1}{12}$

$x = 3$ geeft $x - 3 = 0$, dus dit is geen oplossing van de vergelijking $g'(x) = 0$

Vraag 1c - 5 punten

Voor een meetkundige rij geldt $u_2 = u_1 \cdot r$ en $u_5 = u_1 \cdot r^4$

Dit geeft $\frac{u_5}{u_2} = \frac{u_1 \cdot r^4}{u_1 \cdot r} = r^3$, dus $r^3 = \frac{640}{5120} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$

Hieruit volgt $u_1 = \frac{u_2}{r} = \frac{5120}{\frac{1}{2}} = 5120 \cdot 2 = 10\,240$ en $u_{11} = u_1 \cdot r^{10} = 10240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 10\,240 \cdot \frac{1}{1024} = 10$

De somformule geeft: $Som = \frac{u_{l+1} - u_e}{r-1} = \frac{u_{11} - u_1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{10 - 10\,240}{-\frac{1}{2}} = -10\,230 \cdot -2 = 20\,460$

Vraag 1d - 5 punten

$\log(P) = 0{,}16 \log(L) - 0{,}20 \Leftrightarrow 0{,}16 \log(L) = \log(P) + 0{,}20 \Leftrightarrow \log(L) = 6{,}25 \log(P) + 1{,}25$

$\Leftrightarrow 10^{\log(L)} = 10^{6{,}25 \log(P) + 1{,}25}$

$\Leftrightarrow L = 10^{6{,}25 \log(P) - 1{,}25} = 10^{6{,}25 \log(P)} \cdot 10^{1{,}25} = \left(10^{\log(P)}\right)^{6{,}25} \cdot 10^{1{,}25} = P^{6{,}25} \cdot 10^{1{,}25}$

Dit geeft $a = 10^{1{,}25} \approx 17{,}78$ en $b = 6{,}25$

Alternatief:

$\log(P) = 0{,}16 \log(L) - 0{,}20 \Leftrightarrow 10^{\log(P)} = 10^{0{,}16 \log(L) - 0{,}20}$

$\Leftrightarrow P = 10^{0{,}16 \log(L) - 0{,}20} = 10^{0{,}16 \log(L)} \cdot 10^{-0{,}20} = \left(10^{\log(L)}\right)^{0{,}16} \cdot 10^{-0{,}20} = L^{0{,}16} \cdot 10^{-0{,}20}$

$\Leftrightarrow L^{0{,}16} = P \cdot 10^{0{,}20} \Leftrightarrow L = P^{\frac{1}{0{,}16}} \cdot 10^{\frac{0{,}20}{0{,}16}}$.

Dit geeft $a = 10^{\frac{0{,}20}{0{,}16}} = 10^{1{,}25} \approx 17{,}78$ en $b = \frac{1}{0{,}16} = 6{,}25$

Vraag 2a - 4 punten

$t = 0$ geeft $a \cdot \mathrm{e}^0 = 576 \Leftrightarrow a \cdot 1 = 576 \Leftrightarrow a = 576$

$t = 1$ geeft $a \cdot \mathrm{e}^b = 720 \Leftrightarrow 576 \cdot \mathrm{e}^b = 720 \Leftrightarrow \mathrm{e}^b = \frac{720}{576} \Leftrightarrow \mathrm{e}^b = 1{,}25 \Leftrightarrow b = \ln(1{,}25)$ $(\approx 0{,}2231)$

Vraag 2b - 5 punten

$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -216 \cdot \mathrm{e}^{0{,}69315t} + (576 - 216t) \cdot \mathrm{e}^{0{,}69315t} \cdot 0{,}69315$

Invullen van $t = 1$ geeft $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -216 \cdot \mathrm{e}^{0{,}69315} + (576 - 216) \cdot \mathrm{e}^{0{,}69315} \cdot 0{,}69315$

$\approx -216 \cdot 2{,}00001 + 360 \cdot 2{,}00001 \cdot 0{,}69315 \approx 67$ milligram per uur

Vraag 2c - 4 punten

$T = 25$ geeft $P = \sqrt{111 \cdot 25 + 54 \cdot 25^2 - 25^3} - 100 = \sqrt{20900} - 100 \approx 44{,}568$

Een groeipercentage van $44{,}568$ geeft een groeifactor van $1{,}44568$

Het gewicht na één uur is dus $1{,}44568 \cdot 110 \approx 159$ milligram

Vraag 2d - 5 punten

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = \frac{111 + 108T - 3T^2}{2\sqrt{111T + 54T^2 - T^3}}$$

$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T} = 0 \Leftrightarrow 111 + 108T - 3T^2 = 0 \Leftrightarrow T^2 - 36T - 37 = 0$

Dit geeft $(T - 37)(T + 1) = 0$ of $T = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 + 4 \cdot 37}}{2} = \frac{36 \pm \sqrt{1444}}{2} = \frac{36 \pm 38}{2} \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 37$

De enige oplossing met $15 < T < 50$ is $T = 37$

Vraag 3a - 3 punten

Er zijn $2^6 = 64$ mogelijkheden

Vraag 3b - 4 punten

In een rij van zes kunnen de twee wisselingen op $\binom{5}{2} = 10$ manieren geplaatst worden.

Er zijn 10 series die met W beginnen en ook 10 die met een N beginnen, dat zijn er samen 20.

Vraag 3c - 1 punt

$H_0\colon p = 0{,}5;\ H_1\colon p < 0{,}5$

Vraag 3d - 4 punten

$P(X = 20) = \binom{50}{20} \cdot 0{,}5^{20} \cdot 0{,}5^{30} \approx 0{,}0419$

Vraag 3e - 3 punten

Je kunt geen conclusie trekken uit deze toetsingsprocedure, want daarvoor moet je de overschrijdingskans $P(X \leq 20)$ vergelijken met de onbetrouwbaarheidsdrempel en beide zijn niet bekend.

Vraag 4a - 4 punten

$60 = 50 + 10 = \mu + 2\sigma$. De kans dat een kandidaat meer dan 60 minuten nodig heeft is dus 0,023.

De verwachtingswaarde van het aantal studenten dat meer dan 60 minuten nodig heeft is dan $0{,}023 \cdot 2500 = 57{,}5$

Vraag 4b - 3 punten

Het gemiddelde van de totale tijd die een kandidaat nodig heeft is $6 \cdot 10 = 60$ minuten.

De kans op een uitkomst boven het gemiddelde is bij iedere normale verdeling gelijk aan $\frac{1}{2}$,
dus ook in dit geval.

Vraag 4c - 4 punten

Met X de tijd voor de open vragen en Y de tijd voor de multiple choice vragen volgt

$\sigma_X^2 = 5^2 = 25$; $\sigma_Y^2 = 6 \cdot 2^2 = 24$

Dus $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{25 + 24} = \sqrt{49} = 7$

Vraag 4d - 5 punten

De kans dat Sandra precies één van de drie vragen met 3 opties en geen vragen met 4 opties goed gokt is $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{2^2 \cdot 3^4}{3^3 \cdot 4^3} = \frac{3}{16}$

De kans dat Sandra precies één van de drie vragen met 4 opties en geen vragen met 3 opties goed gokt is $3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{3^3 \cdot 2^3}{4^3 \cdot 3^3} = \frac{1}{8}$

De gevraagde kans is dus $\frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{5}{16}$

Vraag 5a - 2 punten

De sinus is minimaal -1 en maximaal 1,
dus minimumhoogte $25 - 175 = -150$ centimeter en maximumhoogte $25 + 175 = 200$ centimeter

Vraag 5b - 4 punten

$t = 1$ geeft $H = 25 + 175\sin(0{,}5) \approx 108{,}9$ cm, $t = 2$ geeft $H = 25 + 175\sin(1) \approx 172{,}3$ cm

Dat is een toename van $\frac{172{,}3 - 108{,}9}{108{,}9} \times 100\% \approx 58\%$

Vraag 5c - 4 punten

De periode van H is $\frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi \approx 12{,}566$ uur

De hoogte is dus ook gelijk aan de hoogte op $t = 1$ voor $t = 1 + 12{,}566 = 13{,}566$

Op $t = 0$ is de hoogte op de evenwichtsstand.
Een halve periode later, dat is op $t = 2\pi \approx 6{,}283$ is de hoogte ook op de evenwichtsstand.

En 1 uur voordat de hoogte ook op de evenwichtsstand is, is de hoogte gelijk aan die op $t = 1$.

Dat is op $t = 6{,}283 - 1 = 5{,}283$ uur.

