CENTRALE COMMISSIE VOORTENTAMEN WISKUNDE

Tentamen Wiskunde A

Datum: 21 april 2022
Tijd: 13.30 – 16.30 uur
Aantal opgaven: 6

Lees onderstaande aanwijzingen s.v.p. goed door voordat u met het tentamen begint. Als u zich niet aan deze aanwijzingen houdt, kan dit tot aftrek van punten leiden.

Zet uw naam op alle in te leveren antwoordbladen.

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad.

Laat bij elke vraag door middel van een redenering, een berekening, of een toelichting op het gebruik van de rekenmachine zien hoe het antwoord is verkregen. Zonder redenering of berekening worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend (*zie ook opgave 1*).

Schrijf leesbaar en met inkt. Gebruik geen correctievloeistof zoals tipp-ex. Gebruik van een potlood is alleen toegestaan bij het tekenen van grafieken.

Bij het tentamen kunt u gebruik maken van een eenvoudige wetenschappelijke rekenmachine. **Overige hulpmiddelen, zoals een grafische rekenmachine, een rekenmachine met de mogelijkheid om integralen te berekenen, een formulekaart, BINAS of een tabellenboek, zijn NIET toegestaan**.

Op de laatste twee bladzijden van dit tentamen is een lijst met formules afgedrukt.

Het gebruik van een mobiele telefoon of andere telecommunicatieapparatuur tijdens het tentamen is verboden. Zet uw **mobiele telefoon uit** en stop deze in uw tas.

Te behalen punten per onderdeel:

Opgave	1	2	3	4	5	6
a	6	3	4	4	5	5
b	6	5	4	2	5	4
c	5	5	5	4	4	
d			3	2		
Totaal	17	13	16	12	14	9

Cijfer $= \dfrac{\text{behaald aantal punten}}{9} + 1$

U bent geslaagd als uw cijfer 5,5 of hoger is.

Opgave 1 – Algebraïsche vaardigheden

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Bij het ***algebraïsch*** *uitwerken van opgaven moet de berekening volledig op papier worden gegeven. Het aflezen van functiewaarden uit een al dan niet met een rekenmachine gemaakte tabel is geen algebraïsche berekening. De rekenmachine mag wel gebruikt worden voor eenvoudige berekeningen en voor het benaderen van getallen zoals* $\sqrt{2}$ *en* $\log(3)$.
Tenzij anders vermeld, dienen alle berekeningen in dit tentamen algebraïsch te worden uitgewerkt.

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 9x^2 + 5x - 7$.
De lijn ℓ wordt gegeven door de vergelijking $y = 5x + 4$.

6pt **a** Bereken algebraïsch de waarden van a waarvoor geldt dat de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ evenwijdig loopt aan lijn ℓ.

De functie g wordt gegeven door $g(x) = 3\sqrt{4x^2 - 7}$.

6pt **b** Bereken algebraïsch de waarde(n) van x waarvoor geldt dat de helling van de grafiek van g in het punt $\big(x, g(x)\big)$ gelijk is aan 8.

5pt **c** Bereken algebraïsch de *x*-coördinaat van het snijpunt van de grafieken van $h(x) = 3 \cdot 2^x$ en $k(x) = \frac{1}{3} \cdot 4^x$.
Geef een benadering van het antwoord afgerond op 4 cijfers achter de komma.

Opgave 2 – Alcoholcontrole

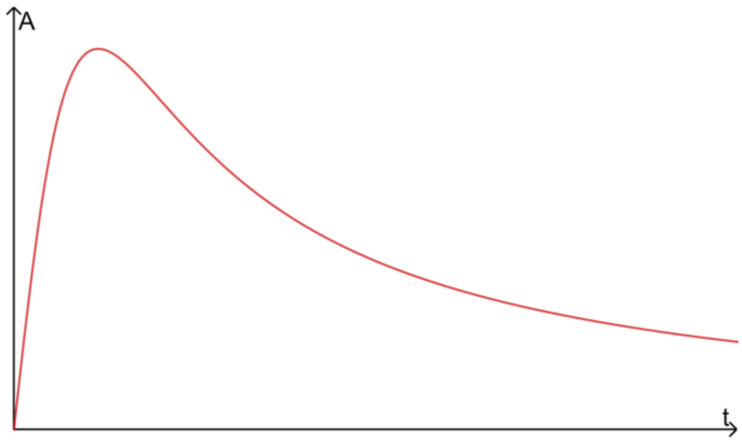
Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Een proefpersoon drinkt in een zeer korte tijd een aantal glazen sterke drank. Vervolgens wordt het alcoholgehalte gemeten in de lucht die hij uitademt. Dit alcoholgehalte neemt direct na het drinken van de sterke drank snel toe, maar neemt na enige tijd weer af. Het verband tussen het alcoholgehalte en de tijd wordt bij benadering gegeven door de formule

$$A = \frac{4510\,t}{2t^2 + 5}$$

In deze formule is A het alcoholgehalte in de uitgeademde lucht, gemeten in microgram per liter ($\mu g/l$, door de politie meestal verbasterd tot ugl) en is t de tijd in uren, met $t = 0$ op het moment dat de proefpersoon de sterke drank drinkt.

In de figuur hieronder ziet u de grafiek die het verband tussen A en t weergeeft.



3pt **a** Bereken algebraïsch met hoeveel procent het alcoholgehalte volgens bovenstaande formule toeneemt tussen $t = \frac{1}{2}$ en $t = 1$.
Geef het antwoord afgerond op hele procenten.

In Nederland mag een persoon niet aan het verkeer deelnemen als het alcoholgehalte in de uitgeademde lucht hoger is dan 220 microgram per liter.

5pt **b** Bereken algebraïsch het eerste tijdstip na $t = 1$ waarop de proefpersoon volgens bovenstaande formule weer aan het verkeer mag deelnemen.

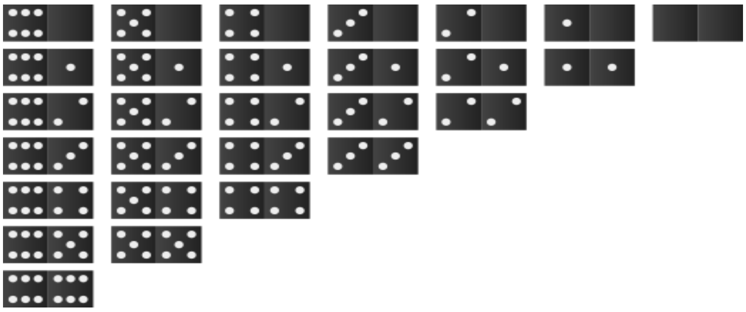
5pt **c** Bereken algebraïsch het tijdstip waarop het alcoholgehalte in de uitgeademde lucht volgens bovenstaande formule maximaal is.
Geef het antwoord in minuten nauwkeurig.

Opgave 3 – Dominostenen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Domino is een spel dat met speciale dominostenen wordt gespeeld. Deze stenen zijn vaak gemaakt van plastic of hout. De stenen zijn langwerpig van vorm en verdeeld in twee vierkante helften, ieder gemerkt met ogen. In de standaarddomino-uitvoering hebben de helften nul tot en met zes ogen. (bron: Wikipedia).

In de standaarduitvoering bestaat een set uit 28 dominostenen, zoals weergegeven in de figuur hieronder.



Je ziet in de figuur dat er 7 *dubbele* dominostenen zijn, dat zijn stenen met hetzelfde aantal ogen op beide helften (6-6, 5-5, 4-4, 3-3, 2-2, 1-1 en 0-0).

Twee spelers, Yassine en Zaher spelen met een set standaard dominostenen. Bij de start van het spel liggen de stenen met de ogen naar beneden op tafel. Vervolgens pakken beide spelers willekeurig 7 dominostenen.
Wie er mag beginnen, wordt als volgt bepaald:

1. Als beide spelers een dubbele steen hebben, begint degene met het hoogste aantal ogen op de dubbele steen (5-5 gaat daarbij dus voor 3-3).
2. Als slechts één van beide spelers een dubbele steen heeft, begint de speler met de dubbele steen
3. Als geen van beide spelers een dubbele steen heeft, worden alle stenen weer teruggelegd op tafel en pakken beide spelers opnieuw blindelings 7 stenen.

De kans dat geen van beide spelers een dubbele steen heeft is, afgerond op vier decimalen, gelijk aan 0,0029.

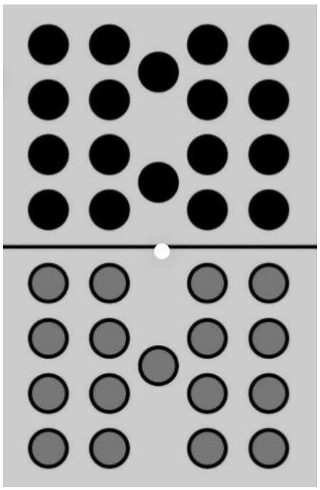
4pt a Toon dit aan met een berekening.

4pt b Bereken de kans dat Yassine direct met het eerste spel mag beginnen (dus zonder dat de spelers opnieuw stenen moeten pakken).

Vervolg opgave 3

Naast de standaarduitvoering bestaan er ook versies met 0 t/m 9 ogen en met 0 t/m 18 ogen.

Net als de standaarduitvoering, bestaat een set uit alle combinaties van 0 t/m 9 respectievelijk 0 t/m 18 ogen en uit alle mogelijke dubbele stenen. Hiernaast ziet u bijvoorbeeld de dominosteen met 18 en 17 ogen uit de versie met 0 t/m 18 ogen.



5pt c Bereken het aantal dominostenen in een set van de versie met 0 t/m 18 ogen.

We nemen nu een set dominostenen met 0 t/m 9 ogen.

3pt d Bereken het aantal dominostenen in deze set waarbij het totale aantal ogen (de som van de ogen op de beide helften) groter is dan 12.

Opgaven 4, 5 en 6 staan op de volgende pagina's

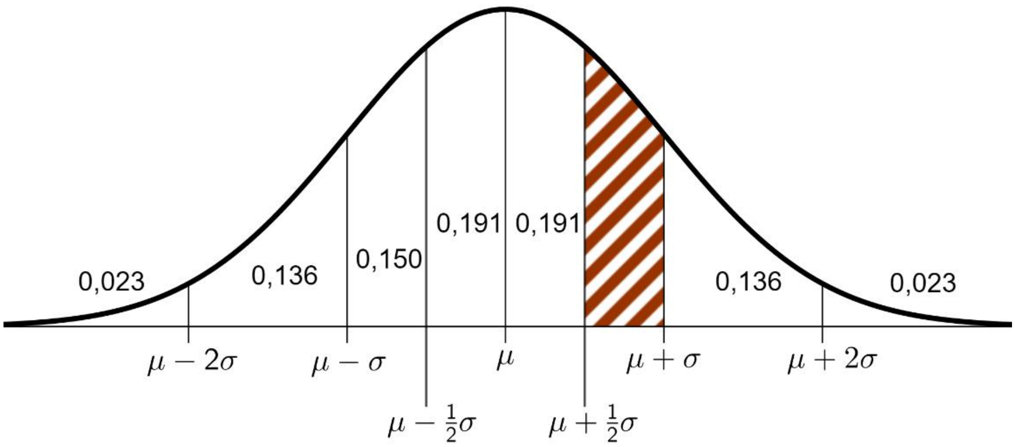
Opgave 4 – Het gewicht van de dominostenen

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

Het gewicht van de houten dominostenen uit de Onimod fabriek is normaal verdeeld met een gemiddelde van 5,4 gram en een standaardafwijking van 0,2 gram.

Wim pakt aselect zeven stenen uit een dominospel met 28 stenen.

4pt a Bereken met behulp van de figuur hieronder de kans dat elk van de zeven stenen die Wim pakt een gewicht heeft tussen 5,3 gram en 5,8 gram.



Een normale kansverdeling X. De oppervlakte van het gearceerde vlakdeel komt overeen met $P\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma < X < \mu + \sigma\right) = 0{,}150$

Bij een kwaliteitscontrole van de machine die de dominostenen produceert, wordt getoetst of het gemiddelde gewicht van de stenen nog steeds 5,4 gram is. Hiervoor wordt het gewicht van 36 door deze machine geproduceerde stenen gemeten. In deze toetsingsprocedure wordt aangenomen dat de standaardafwijking van het gewicht van de dominostenen nog steeds 0,2 g is en neemt men een onbetrouwbaarheidsdrempel van $\alpha = 0{,}05$.

2pt b Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese voor deze toetsingsprocedure.

Het gemiddelde gewicht van de 36 stenen is 5,46 g.
Dit geeft een overschrijdingskans van 0,03593.

4pt c Bereken de parameters μ en σ van de toetsingsgrootheid die is gebruikt om deze overschrijdingskans te berekenen.

2pt d Wat is de conclusie van deze toetsingsprocedure?
Motiveer uw antwoord!

Opgave 5 – Luchtdruk

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

De luchtdruk neemt bij benadering exponentieel af met toenemende hoogte. De luchtdruk wordt gemeten in hectoPascal (hPa).

Op een zeker moment wordt op een hoogte van 1 km een luchtdruk gemeten van 890 hPa en wordt op een hoogte van 5 km een luchtdruk gemeten van 542 hPa.

5pt a Bereken voor deze situatie algebraïsch de luchtdruk op 0 km hoogte.

Naast de hoogte is ook de temperatuur van invloed op de luchtdruk.
In het vervolg van deze opgave nemen we aan dat de luchtdruk wordt gegeven door de formule

$$P = 1013 \cdot \mathrm{e}^{\frac{-0{,}034h}{t+273{,}15}}$$

In deze formule is P de luchtdruk in hPa, t de temperatuur van de lucht in graden Celsius (°C) en h de hoogte in meters.
Op 1 km (= 1000 meter) hoogte is de temperatuur op een zeker moment 0°C.

5pt b Bereken met behulp van de afgeleide $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}h}$ met hoeveel hPa/meter de luchtdruk afneemt op een hoogte van 1 km bij een temperatuur van 0°C.

Stel dat iemand zich bevindt in een heteluchtballon met een barometer (= luchtdrukmeter) en een thermometer (= temperatuurmeter). Met de gegeven formule is dan de hoogte te berekenen.

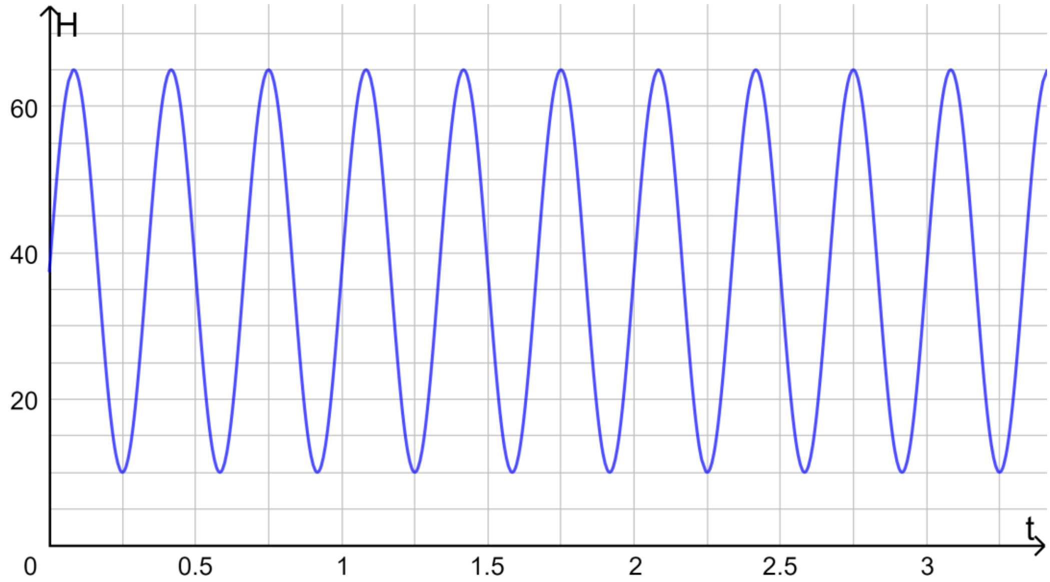
4pt c Herleid de gegeven formule tot een formule waarbij de hoogte h wordt uitgedrukt in de luchtdruk P en de temperatuur t.

Opgave 6 – Elektrische fiets

Begin elke opgave op een nieuw antwoordblad!

In Nederland is het gebruik van fietsen met een elektrische motor die trapondersteuning geeft (meestal e-bike genoemd) de laatste jaren erg populair geworden. De ondersteuning die de motor geeft, is afhankelijk van de uitgeoefende spierkracht en de snelheid van de fiets. Deze snelheid wordt gemeten met behulp van een sensor die op één van de spaken van het achterwiel is bevestigd, zie de foto hiernaast.

Op een mooie dag rijdt Bert met een constante snelheid met wind mee over een lange rechte weg. In de grafiek hieronder ziet u het verband tussen H, de hoogte van de sensor boven de weg in cm en t, de tijd in seconden.



Bij deze grafiek past een formule van de vorm $H = a + b\sin(ct)$.

5pt **a** Bereken de waarden van a, b en c in deze formule.

Op de terugweg heeft Bert de wind tegen, dus rijdt hij met een lagere, maar nog wel constante, snelheid. Bij deze snelheid geldt $c = 16$.
Per omwenteling van het achterwiel legt de fiets 235 cm af.

4pt **b** Bereken algebraïsch de snelheid in km/uur waarmee Bert dan fietst.
Geef uw antwoord afgerond op één cijfer achter de komma.
(1 uur = 3600 seconden, 1 km = 100 000 cm)

Einde van het tentamen.

Als u klaar bent met het tentamen, controleer dan of ***uw naam*** *en het* ***opgavenummer*** *op ieder antwoordblad staat.*
Doe de antwoordbladen in de juiste volgorde in het plastic mapje en doe het blaadje met uw gegevens voorop in dit mapje.

Wat er ***niet*** *in het mapje moet:*
- lege blaadjes, laat deze s.v.p. op uw tafel liggen;
- blaadjes waar alleen uw naam op staat, neem deze s.v.p. mee;
- kladpapier;
- deze opgaven.

Alleen zo kunnen wij zorgen voor een vlotte correctie van uw tentamenwerk.

Blijf zitten totdat één van de surveillanten uw mapje inneemt (of u bij zich roept).

Formulelijst Wiskunde A

Tweedegraads vergelijkingen

De oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ en $b^2 - 4ac \geq 0$ zijn

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Differentiëren

Naam van de regel	**Functie**	**Afgeleide**
Somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
Productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Kettingregel	$k(x) = f(g(x))$	$k'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$ ofwel $\dfrac{dk}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Logaritmen

Regel	**Voorwaarden**
${}^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log \dfrac{a}{b}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ b > 0$
${}^{g}\log a^{p} = p \cdot {}^{g}\log a$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0$
${}^{g}\log a = \dfrac{{}^{p}\log a}{{}^{p}\log g}$	$g > 0,\ \ g \neq 1,\ \ a > 0,\ \ p > 0,\ \ p \neq 1$

Rijen

rekenkundige rij:	$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$
meetkundige rij:	$Som = \dfrac{u_{l+1} - u_e}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
In beide formules geldt:	*e* = rangnummer eerste term; *l* = rangnummer laatste term

Meer formules op de volgende pagina.

Formulelijst wiskunde A (vervolg)

Kansrekening

Voor alle toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
Voor onafhankelijke toevalsvariabelen *X* en *Y* geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet:
Bij een serie van *n* onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som *S* en voor het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten *X*:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\qquad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\qquad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele *X*, waarbij *n* het aantal experimenten is en *p* de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachtingswaarde: $E(X) = np$ $\qquad$ Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

n en *p* zijn de parameters van de binomiale verdeling.

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele *X* die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en $P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

μ en σ zijn de parameters van de normale verdeling.

Toetsen van hypothesen

Bij een toetsingsprocedure waarbij de toetsingsgrootheid *T* normaal verdeeld is met gemiddelde μ_T en standaardafwijking σ_T zijn de grenswaarden voor het beslissingscriterium:

α	linkszijdig	rechtszijdig	tweezijdig
0,05	$g = \mu_T - 1{,}645\sigma_T$	$g = \mu_T + 1{,}645\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 1{,}96\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 1{,}96\sigma_T$
0,01	$g = \mu_T - 2{,}33\sigma_T$	$g = \mu_T + 2{,}33\sigma_T$	$g_l = \mu_T - 2{,}58\sigma_T$
			$g_r = \mu_T + 2{,}58\sigma_T$

